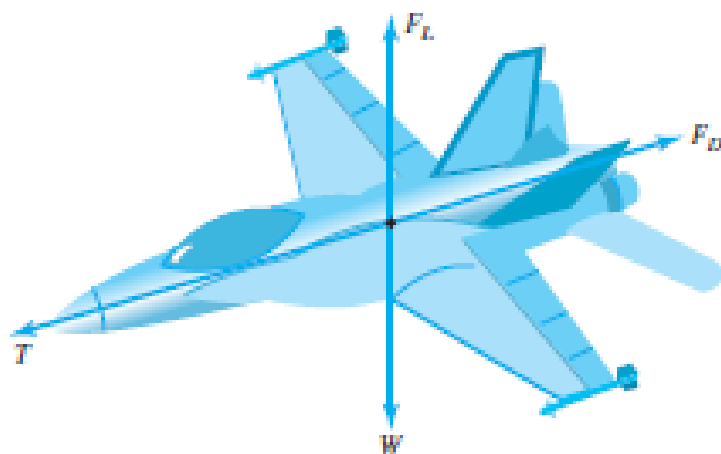
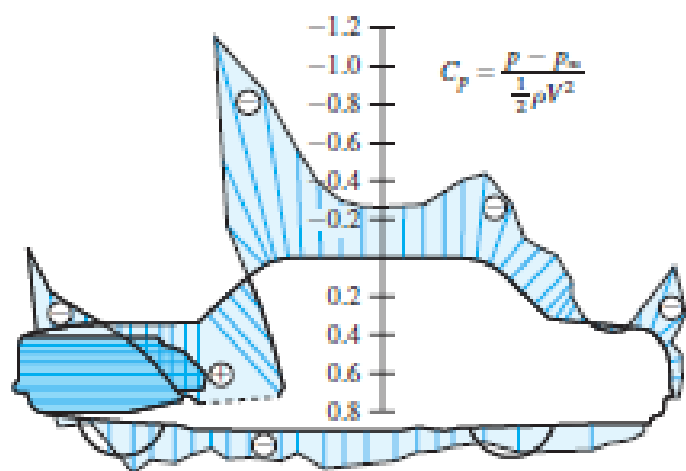


دانشگاه سوادکوه  
دانشکده فنی

## مکانیک سیالات ۲



تالیف: دکتر نیما امانی فرد

زمستان ۱۳۹۱

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل ۱- معادلات دیفرانسیل حرکت سیال	
۱-۱ مقدمه.....	۲
۲-۱ فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی.....	۳
۳-۱ فرم دیفرانسیلی معادله‌ی ممنتوم.....	۱۰
مسائل فصل اول.....	۱۷
فصل ۲- تعاریف سینماتیکی جریان	
۱-۲ تعریف خط جریان، رگه‌ی جریان، خط سیر و خط لحظه.....	۲۰
۲-۲ تعابیر ریاضی خط جریان، رگه‌ی جریان، خط سیر و خط لحظه.....	۲۱
۱-۲-۲ تعبیر ریاضی خط جریان.....	۲۱
۲-۲-۲ تعبیر ریاضی خط سیر.....	۲۳
۳-۲-۲ تعبیر ریاضی رگه‌ی جریان.....	۲۴
۴-۲-۲ تعبیر ریاضی خط لحظه.....	۲۵
۳-۲ تعریف تابع جریان.....	۲۶
۴-۲ حرکت چرخشی در سیال.....	۲۹
۱-۴-۲ دوران.....	۲۹
۲-۴-۲ چرخش.....	۳۱
۳-۴-۲ گردش.....	۳۲
۴-۴-۲ جریان غیر چرخشی.....	۳۳
مسائل فصل دوم.....	۳۷

فصل ۳- مفهوم لایه مرزی و طبقه‌بندی جریان‌ها

۴۰	۱-۳ مفهوم لایه مرزی .....
۴۰	۱-۱-۳ لایه مرزی در یک معادله دیفرانسیل .....
۴۲	۲-۱-۳ مفهوم لایه مرزی با استفاده از معادلات ناویر استوکس .....
۴۳	۳-۱-۳ رابطه‌ی لایه مرزی و چرخش .....
۴۴	۲-۳ طبقه‌بندی جریان‌های لزج از نقطه‌نظر عدد رینولدز .....
۴۵	۳-۳ تقسیم‌بندی جریان از نقطه‌نظر لایه مرزی .....
۴۸	۴-۳ دسته‌بندی جریان‌های آرام و آشفته .....
۵۱	۵-۳ دسته‌بندی جریان قابل تراکم و غیرقابل تراکم .....

فصل ۴- جریان‌های داخل مجاری

۵۴	۱-۴ مقدمه .....
۵۴	۲-۴ جریان بین دو صفحه‌ی تخت موازی .....
۶۰	۳-۴ جریان بین دو صفحه‌ی تخت موازی با صفحات متحرک .....
۶۴	۴-۴ جریان توسعه یافته با سطح آزاد .....
۶۶	۵-۴ جریان توسعه یافته در داخل کانال‌ها .....
۶۷	۶-۴ جریان داخل لوله .....
۶۹	۷-۴ جریان توسعه یافته‌ی داخل دو سیلندر دوار .....
۷۳	مسائل فصل چهارم .....



## فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل ۵- جریان‌های لزج خارجی	
۵-۱ تقریب لایه مرزی.....	۷۷
۵-۱-۱ ساده کردن معادلات حرکت به کمک روش مقایسه‌ی مرتبه‌ها.....	۷۷
۵-۲ حل معادلات لایه مرزی روی صفحه‌ی تخت.....	۸۱
۵-۲-۱ حل جریان لایه مرزی روی صفحه‌ی تخت به کمک روش مقایسه‌ی مرتبه‌ها.....	۸۱
۵-۲-۲ حل تشابهی جریان روی صفحه‌ی تخت.....	۸۲
۵-۲-۳ حل تقریبی جریان روی صفحه‌ی تخت به روش انتگرالی.....	۸۶
۵-۳-۲-۱ روش انتگرالی.....	۸۶
۵-۳-۲-۱-۱ روش انتگرالی به روش حدس زدن پروفیل سرعت.....	۹۱
۵-۳-۲-۲ روش انتگرالی به روش پروفیل تجربی (روش Thwaites).....	۹۷
۵-۳ مطالعات تجربی حول اجسام مستغرق.....	۱۰۰
۵-۳-۱ جریان حول سیلندر.....	۱۰۰
۵-۳-۱-۱ جریان ایده‌آل (پتانسیل) حول سیلندر.....	۱۰۰
۵-۳-۱-۲ نقطه‌ی جدایی.....	۱۰۲
۵-۳-۲ جریان حقیقی حول سیلندر.....	۱۰۴
۵-۳-۳ طراحی ایرودینامیکی.....	۱۱۱
مسائل فصل پنجم.....	۱۱۳

## فهرست مطالب

صفحه

عنوان

### فصل ۶- جریان های پتانسیل

۱۱۸	۱-۶ مقدمه
۱۱۹	۲-۶ جریان های پتانسیل پایه ای
۱۱۹	۱-۲-۶ جریان یکسو (یکنواخت)
۱۲۰	۲-۲-۶ جریان چشمه و چاه
۱۲۱	۳-۲-۶ گرداب آزاد
۱۲۳	۳-۶ ترکیب جریان های پایه ای
۱۲۳	۱-۳-۶ ترکیب جریان یکنواخت و چشمه (نیم بدنه)
۱۲۵	۲-۳-۶ ترکیب چشمه و چاه (دوقطبی)
۱۲۷	۳-۳-۶ جریان دوقلو (دوبلت)
۱۲۸	۴-۳-۶ ترکیب جریان دوقطبی و جریان یکنواخت (بدنه ی رانکین)
۱۳۰	۵-۳-۶ جریان حول سیلندر
۱۳۲	۶-۳-۶ جریان حول سیلندر با گرداب
۱۳۵	۷-۳-۶ جفت گرداب
۱۳۵	۸-۳-۶ ترکیب جریان یکنواخت و جفت گرداب
۱۳۷	۹-۳-۶ ترکیب چشمه (چاه) و گرداب
۱۳۸	۴-۶ شرط کاتا برای گرداب ترک جسم
۱۴۱	مسائل فصل ششم

## فهرست مطالب

---

عنوان	صفحه
فصل ۷- جریان کانال‌های باز	
۱-۷ مقدمه.....	۱۴۵
۲-۷ پروفیل سرعت در یک کانال.....	۱۴۵
۳-۷ محاسبه‌ی سرعت موج گرانشی.....	۱۴۶
۴-۷ محاسبه‌ی دبی در یک کانال باز.....	۱۴۸
۵-۷ بهترین مقطع یک کانال.....	۱۵۳
۱-۵-۷ بهترین مقطع یک کانال مستطیلی.....	۱۵۴
۲-۵-۷ بهترین مقطع یک کانال ذوزنقه‌ای.....	۱۵۴
۶-۷ پرش هیدرولیکی.....	۱۵۵
مسائل فصل هفتم.....	۱۶۰
مراجع.....	۱۶۲

کتاب حاضر ادامه کتاب مکانیک سیالات جلد اول می‌باشد که مبتنی بر تجربیات نگارنده طی سالیان تحصیل و تدریس حاصل شده است. لزوم نگارش این کتاب از آنجا برآمد که طی سالیان اخیر و پیشرفت حاصله در زمینه مفاهیم اساسی مکانیک سیالات مثل مفهوم چرخش (ورتی‌سیتی) و دینامیک آن، بسیاری از توجیهات و تفکرات مربوط به پدیده‌هایی از قبیل گرداب، آشفتگی و حتی لایه مرزی دچار تغییرات محسوسی شده است. براین اساس و براساس شفاف‌تر شدن مفاهیم و پدیده‌های دینامیک سیالات، لزوم بیان مستدل‌تر و در عین حال نوین‌تر بر نگارنده محسوس‌تر گردید.

لذا در کتاب حاضر که عمدتاً مبتنی بر سر فصل درس مکانیک سیالات ۲ کارشناسی مهندسی مکانیک تنظیم گردیده است، دانشجویان محترم با نگاهی جدید و برآمده از اصول دروس پیشیناز و آخرین دستاوردهای قابل بیان در سطح کارشناسی آشنا می‌گردند و تلاش بر آن بوده تا مفاهیم هر چه اساسی‌تر و با ریشه و عمق بیشتری تفهیم گردد تا دستخوش فراموشی که ناشی از برداشت‌های سطحی است نگردد. در پایان از کلیه دانشجویانم که در نگارش این کتاب یاری نمودند، بخصوص جناب آقای مهندس حامد محدث دیلمی کمال تشکر را دارم.

نیما امانی‌فرد

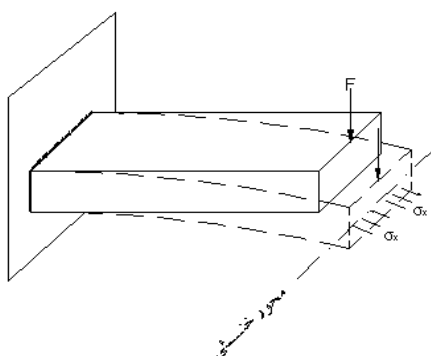
دانشیار تبدیل انرژی

# فصل اول

معادلات دیفرانسیل حرکت سیال

## ۱-۱ مقدمه

جریان سیال در واقع یک کرنش بزرگ از یک محیط پیوسته تلقی می‌گردد و بدیهی است این پدیده با حرکت یک ذره یا جسم صلب، که در واقع سنجش تغییر وضعیت جرم نسبت به یک مختصات مشخص است، کاملاً متفاوت می‌باشد. از آنجاییکه که تنش و در نتیجه کرنش در داخل محیط دارای توزیع می‌باشد و نسبت به مکان دارای تغییرات احتمالی است، لذا نرخ زمانی کرنش نیز رفتار مشابهی دارد. از این جهت در جریان یک سیال، سرعت که از نرخ کرنش سیال تبعیت می‌کند و لذا دارای توزیع (تابعیت نسبت به مکان) بوده و از این حیث با تعبیر سرعت در خصوص ذرات و اجسام صلب، کاملاً متفاوت است. مثالی از توزیع تنش و کرنش را می‌توان در مسئله آشنای خمش یک تیر مشاهده نمود. در شکل ۱-۱ یک تیر یک سرگیردار تحت نیروی  $F$  خم شده و توزیع تنش و کرنش در مقطع تیر به وجود آمده و وجود محور خمشی یعنی کرنش صفر گویای این مطلب است.



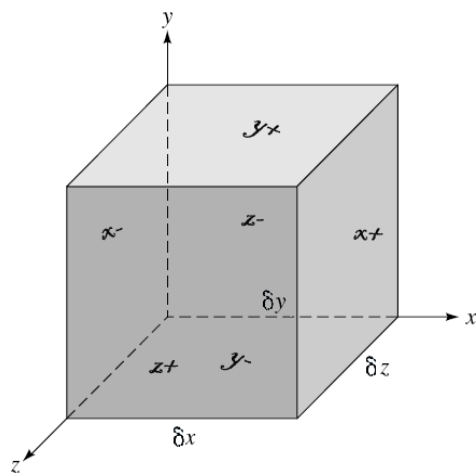
شکل ۱-۱ خمش تیر یک سرگیردار.

البته موضوع شکل ۱-۱ یک تغییر شکل الاستیک است اما در جریان سیال تغییر شکل را می‌توان از نوع پلاستیک تعبیر نمود و تا هنگامیکه تنش‌های برشی وجود دارند، کرنش زاویه‌ای نیز همواره وجود داشته و متصور است. بر اساس این دیدگاه می‌توان دریافت که نگرش تحلیل دینامیکی چنین حرکتی نمی‌تواند همانند دینامیک یک ذره "از دیدگاه لاگرانژی" قابل تحلیل باشد، چرا که انتخاب یک ذره مادی مستقل با فرض پیوستگی سیال، معیار مشخص و تعریف شده‌ای ندارد تا بتوان ذره مورد بحث را دنبال نمود. به همین دلیل از دیدگاه دیگری در دینامیک می‌توان بهره جست که برای این منظور طراحی و مطرح گردیده است.

این دیدگاه به "دیدگاه اوپلری" موسوم است. با این دیدگاه در دروس ترمودینامیک ۱ و مکانیک سیالات ۱ آشنا شده‌ایم. مطرح شدن "حجم کنترل" یا "حجم معیار" به عنوان پنجره یا قاب مطالعاتی در دل حرکت سیالات همان "دیدگاه اوپلری" است. اساس این دیدگاه مبتنی بر در نظر گرفتن یک پنجره فرضی و ثابت (غیر متحرک) در میدان حرکت سیال می‌باشد و تناسب بین پارامترهای ورودی و خروجی مختلف حرکت مانند جرم، ممنتوم و انرژی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. قبلاً به صورت ضمنی با این دیدگاه در مقیاس بزرگ به عنوان معادلات انتگرالی پیوستگی و ممنتوم آشنا شده‌ایم. در این بخش هدف یافتن فرم دیفرانسیلی معادلات می‌باشد، که در واقع مدل ریاضی مکانیزم تغییر شکل و حرکت سیال تلقی می‌گردد. تنها به کمک این نوع معادلات می‌توان به توزیع سرعت، تنش و دیگر پارامترهای حرکت در میدان سیال دست یافت و حجم کنترل‌های انتگرالی قادر به پیش بینی این شرایط نیستند.

## ۱-۲ فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی

معادله‌ی پیوستگی نماد ریاضی قانون بقای جرم است. در این بخش همانگونه که در مقدمه توضیح داده شد، قانون بقای جرم نسبت به یک حجم کنترل دیفرانسیلی ارزیابی می‌شود و منجر به معادله دیفرانسیلی می‌گردد که به آن معادله‌ی پیوستگی می‌گویند. دلایل این نام‌گذاری بسیار واضح است و آن استفاده از تنها شرط حصول این معادلات یعنی پیوستگی محیط حرکت است. به همین منظور حجم کنترلی به ابعاد کوچک  $\delta x$ ،  $\delta y$  و  $\delta z$  را نسبت به مختصات کارترین  $xyz$  انتخاب نموده و میدان حرکت سیال را از سمت منفی محورهای مختصات به سمت مثبت آن‌ها در نظر می‌گیریم. (شکل ۱-۲) روی این شکل سطوح با قرارداد خاصی مشخص شده‌اند. نماد سطوح این ۶ وجهی با راستای محور عمود بر وجه و جهت بردار عمود بر سطح نسبت به محور مختصات مربوطه تعریف می‌شود. به عنوان مثال وجه  $x^+$  یعنی سطحی که بردار نرمال آن در امتداد محور  $x$  ها بوده و جهت آن هم سو با جهت مثبت محور است. به این ترتیب از این پس تمامی محاسبات براساس نماد وجه موردنظر انجام می‌شود. همانطور که قبلاً توضیح داده شد، پارامترهای جریان دارای توزیع در میدان حرکت هستند، یعنی:



شکل ۱-۲ حجم کنترل دیفرانسیلی در مختصات کارتزین

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (\text{چگالی}) \quad (1-1)$$

$$\vec{V} = \vec{V}(t, x, y, z) \quad (\text{بردار سرعت}) \quad (2-1)$$

که رابطه (۲-۱) را می‌توان به مؤلفه‌های سرعت تفکیک کرد:

$$\vec{V} = u(t, x, y, z)\hat{i} + v(t, x, y, z)\hat{j} + w(t, x, y, z)\hat{k} \quad (3-1)$$

به منظور سهولت، محاسبات چگالی و سرعت را در مرکز حجم کنترل یعنی نقطه 0 مفروض در نظر

می‌گیریم، یعنی:

$$\rho_0 = \rho(x, y, z, t) \quad (4-1 \text{ الف})$$

$$\vec{V}_0 = \vec{V}(t, x, y, z) \quad (4-1 \text{ ب})$$

در این شرایط می‌توان با استفاده از روابط انتگرالی به محاسبه دبی جرم عبوری از وجوه حجم کنترل

پرداخت. همانطور که می‌دانیم دبی جرمی برای یک سطح مفروض از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\dot{m} = \int_A \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} \quad (5-1)$$

بر این اساس رابطه‌ی محاسبه دبی جرمی وجوه حجم کنترل با در نظر گرفتن نماد وجوه به شرح زیر قابل

محاسبه است:

$$\dot{m}_{x^+} = \int_{A_{x^+}} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} \quad (6-1 \text{ الف})$$



$$\dot{m}_{x^-} = \int_{A_{x^-}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (1-6-ب)$$

$$\dot{m}_{y^+} = \int_{A_{y^+}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (1-6-پ)$$

$$\dot{m}_{y^-} = \int_{A_{y^-}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (1-6-ت)$$

$$\dot{m}_{z^+} = \int_{A_{z^+}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (1-6-ث)$$

$$\dot{m}_{z^-} = \int_{A_{z^-}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (1-6-ج)$$

به دلیل اینکه المان حجمی فرض شده بسیار کوچک در نظر گرفته شده است بنابراین  $\delta x$ ،  $\delta y$  و  $\delta z$  به منظور نیل به فرم دیفرانسیلی به سمت صفر میل داده خواهند شد. علامت انتگرال عملاً کاربردی نداشته و می‌توان دبی جرمی وجوه را از روابط زیر تعیین کرد:

$$\dot{m}_{x^+} = (\rho u)_{x^+} \delta y \delta z \quad (1-7-الف)$$

$$\dot{m}_{x^-} = -(\rho u)_{x^-} \delta y \delta z \quad (1-7-ب)$$

$$\dot{m}_{y^+} = (\rho v)_{y^+} \delta x \delta z \quad (1-7-پ)$$

$$\dot{m}_{y^-} = -(\rho v)_{y^-} \delta x \delta z \quad (1-7-ت)$$

$$\dot{m}_{z^+} = (\rho w)_{z^+} \delta x \delta y \quad (1-7-ث)$$

$$\dot{m}_{z^-} = -(\rho w)_{z^-} \delta x \delta y \quad (1-7-ج)$$

اجزاء نمایه دار وجوه در رابطه (۱-۷) به شرح زیر بر حسب بسط تیلور و تعریف چگالی و سرعت در نقطه مرکزی 0 محاسبه می‌گردد:

$$(\rho u)_{x^\pm} = (\rho u) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} (\pm \frac{\delta x}{2}) + \dots \quad (1-8)$$

$$(\rho v)_{y^\pm} = (\rho v) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} (\pm \frac{\delta y}{2}) + \dots \quad (1-9)$$

$$(\rho w)_{z^\pm} = (\rho w) + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} (\pm \frac{\delta z}{2}) + \dots \quad (1-10)$$

از آنجایی که بر اساس قرارداد ضرب داخلی، دبی جریان ورودی علامت منفی و دبی جریان خروجی علامت مثبت یافته‌اند، لذا جمع دبی‌های جرمی عبوری از وجوه برابر دبی خالص خروجی از حجم کنترل خواهد بود، یعنی:

$$\begin{aligned} \sum \dot{m}_{net} = & \left[ (\rho u) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{2} \right) + \dots \right] \delta y \delta z - \left[ (\rho u) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \left( -\frac{\delta x}{2} \right) + \dots \right] + \\ & \left[ (\rho v) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \left( \frac{\delta y}{2} \right) + \dots \right] \delta x \delta z - \left[ (\rho v) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \left( -\frac{\delta y}{2} \right) + \dots \right] + \\ & \left[ (\rho w) + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \left( \frac{\delta z}{2} \right) + \dots \right] \delta x \delta y - \left[ (\rho w) + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \left( -\frac{\delta z}{2} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (11-1)$$

عبارت ( ۱۱ - ۱ ) برابر است با :

$$\sum \dot{m}_{net} = \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \dots \right] \delta x \delta y \delta z \quad (12-1)$$

عبارت نقطه چین داخل رابطه (۱۲ - ۱) شامل جملاتی است که حداقل شامل یکی از توان‌های  $\delta x$ ،  $\delta y$  یا  $\delta z$  است. بنابراین در شرایطی که این مقادیر به سمت صفر میل نمایند، عبارت نقطه چین زودتر از بقیه صفر خواهند شد، چرا که دارای توانهای بالاتری از مقادیر خیلی کوچک  $\delta x$ ،  $\delta y$  و  $\delta z$  هستند.

از آنچه که از قانون بقای جرم دریافت می‌شود، دبی جرمی خالص خروجی حجم کنترل می‌بایستی از داخل حجم کنترل تأمین گردد و به عبارتی حاصل عبارت (۱۲ - ۱) برابر نرخ کاهش جرم در حجم کنترل است. این نرخ از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$-\frac{\partial(\rho)}{\partial t} \delta x \delta y \delta z = \text{نرخ کاهش جرم در حجم کنترل} \quad (13-1)$$

از برابری دو رابطه (۱۲ - ۱) و (۱۳ - ۱) و به سمت صفر میل دادن ابعاد حجم کنترل فرم دیفرانسیل قانون بقای جرم در محیط پیوسته به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (14-1)$$

معادله (۱-۱۴) موسوم به "معادله پیوستگی" است. این معادله نه تنها نماد ریاضی قانون بقای جرم است، بلکه به دلیل استفاده از یک شرط و آن پیوسته بودن محیط تغییر شکل، نمادی از شرط پیوستگی نیز می‌باشد. بنابراین هر گاه میدان سرعتی در معادله (۱-۱۴) صدق نکند، می‌توان نتیجه گرفت:

الف- چنین میدانی در یک محیط پیوسته غیرممکن است.

ب- محیط موردنظر پیوسته نمی‌باشد.

مثال ۱-۱ در یک جریان غیرقابل تراکم ( $\rho$  ثابت) و پایدار زمانی ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ )، رابطه‌ی سرعت اویلری به

صورت  $\vec{V} = x\hat{i} + y\hat{j}$  تعریف شده است، آیا چنین میدان سرعتی ممکن است؟

حل:

رابطه (۱-۱۴) به شکل زیر ساده می‌شود، زیرا  $\rho$  ثابت است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{م-۱-۱})$$

همچنین از رابطه سرعت می‌توان دریافت:

$$u = x, \quad v = y \quad (\text{م-۱-۲})$$

با اعمال (م-۱-۲) و تشکیل (م-۱-۱) درمی‌یابیم:

$$1 + 1 \neq 0$$

یعنی چنین میدانی وجود نداشته و یا محیط این میدان پیوسته نیست.

معادله (۱-۱۴) را می‌توان به کمک عملگر گرادیان به شکل زیر نمایش داد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (۱۵-۱)$$

این رابطه در جریان غیرقابل تراکم به شکل زیر ساده خواهد شد چون در جریان غیرقابل تراکم، تغییرات چگالی در مقایسه با تغییرات سرعت بسیار ناچیز و قابل اغماض است.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (۱۶-۱)$$

در اینجا توجه به این نکته که فرض مورد نظر در رابطه (۱-۱۶) غیرقابل تراکم بودن جریان و نه غیرقابل تراکم بودن سیال است، بسیار اهمیت دارد. اساساً هیچ سیالی یا محیط پیوسته‌ای غیر قابل تراکم نبوده و تنها در هنگام اعمال تنش و تغییر شکل می‌توان دریافت که آیا نرخ کرنش حجمی یک سیال در مقایسه با کرنش‌های زاویه‌ای آن (تغییر سرعت) کوچک است یا خیر. به همین دلیل از رابطه (۱-۱۶) کاملاً هویدا و قابل استنباط است که معنای این رابطه چیزی به غیر از صفر بودن کرنش حجمی در جریان سیال نیست. به عبارت دیگر فرض تغییرات عدم چگالی منجر به نماد ریاضی کوچک بودن کرنش حجمی می‌گردد. از رابطه (۱-۱۴) می‌توان شکل‌های دیگر معادله پیوستگی را نیز نمایش داد. برای این منظور از یک عملگر که تنها در دینامیک اویلری و در میدان سرعت معنا می‌یابد می‌توان سود فراوان جست.

این عملگر عبارت است از "مشتق اساسی" که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (17-1)$$

این عملگر از آنجا در یک میدان سرعت مطرح می‌گردد که یک میدان سرعت همانند محمل و مرکبی پارامترهای مختلفی مثل جرم، ممنتوم، انرژی داخلی، دما، آنتالپی و ... را به مکان‌های مختلف توزیع می‌نماید و سه جمله راست عبارت (۱-۱۷) به همین دلیل موسوم به جملات "جابجایی" بوده و جمله مشتق زمانی نیز تغییرات پارامتر مورد نظر را در میدان سرعت، تنها نسبت به عوامل متغیر با زمان و بدون توجه به جابجایی، محاسبه می‌نماید و به همین منظور آن را تغییرات "موضعی" می‌نامند؛ زیرا در موضعی مشخص، تغییرات را نسبت به زمان بیان می‌دارد.

با باز کردن مشتقات عبارت (۱-۱۴) داریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (18-1)$$

و در نتیجه بر اساس تعریف رابطه (۱-۱۷) داریم:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (19-1)$$

رابطه (۱-۱۹) نیز یکی دیگر از فرم‌های رایج عملگری معادله پیوستگی است.

مثال ۱-۲ در یک جریان یک بعدی در دو حالت زیر فرم احتمالی برای سرعت بیابید.

الف- جریان غیرقابل تراکم و پایدار زمانی

ب- جریان غیرقابل تراکم و متغیر زمانی

حل:

اولین نکته مهم قبل از حل این مسئله توجه به یک بعدی بودن جریان است که حسب تعاریف انجام شده، چند بعدی بودن یک جریان تنها به هندسه موردنظر بستگی داشته و ابعاد هندسه تعیین کننده تعداد بعد مسئله است. لذا یک جریان یک بعدی تنها تابع یک بعد هندسی مثلاً  $(x)$  خواهد بود و اساساً ابعاد دیگر قابل تصور نیست. لذا جریان یک بعدی یعنی جریانی که تابع یک مختصه بوده و طبعاً برای سرعت، یک مؤلفه بیشتر وجود ندارد یعنی:

$$\vec{V} = u(t, x)\hat{i}$$

بنابراین در شرایط (الف) داریم:

$$u = u(x)$$

و با توجه معادله پیوستگی تنها فرم محتمل  $u$  حاصل می شود:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u = \text{const}$$

در شرایط (ب) خواهیم داشت:

$$u = u(t, x)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

بر اساس رابطه پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

و در نتیجه:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow u = f(t)$$

از مقایسه‌ی جواب‌های قسمت (الف) و (ب) می‌توان نتیجه گرفت:

۱- با وجود یکسان بودن معادله‌ی دیفرانسیل برای هر دو حالت، جواب‌های متفاوت و با روش‌های حل نسبتاً متفاوت حاصل گردید.

۲- یادآوری می‌شود که یک معادله دیفرانسیل مشتق جزئی به تنهایی یک مسئله نبوده و نمی‌توان بدون تعیین شرایط مرزی و اولیه آن را حل نمود و جواب عمومی برای آن تعیین کرد و لذا معادله پیوستگی دارای جواب یکه و عمومی نیست و برای فیزیک خاص مجدداً حل می‌شود.

---

مثال ۳-۱ برای یک جریان دو بعدی در صفحه  $xy$  مولفه‌ی  $u=x$  تعریف شده است. مؤلفه‌ی دیگر سرعت در راستای  $y$  برای جریان دائمی و غیرقابل تراکم به چه فرمی محتمل است؟

حل:

از پیوستگی یک جریان دو بعدی، غیرقابل تراکم و دائمی از رابطه (۱-۱۶) داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

با اعمال  $u=x$  داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -1 \rightarrow v = -y + f(x)$$

فرم فوق، فرم متحمل  $v$  بوده و هر تابع  $f(x)$  در آن صادق است. که در هر مسئله با توجه به شرایط مرزی تعیین خواهد شد.

---

### ۳-۱ فرم دیفرانسیلی معادله‌ی ممتم

شبیه آنچه در بخش ۲-۱ برای حصول فرم دیفرانسیلی معادله‌ی بقای جرم دیده شد، یک حجم کنترل کوچک مکعبی در سیستم مختصات کارتزین فرض می‌شود. (شکل ۱-۱)

برای به دست آوردن فرم موردنظر معادله ممتم، ابتدا شار عبوری خالص ممتم از وجوه حجم کنترل محاسبه می‌شود. به همین منظور بر اساس رابطه انتگرالی محاسبه شار از وجوه، می‌توان ممتم را در سه

جهت محاسبه کرد. برای سهولت و ساده تر جلوه کردن معادلات، ممntم در راستای  $x$  با نمایه وجوه شکل (۱-۱) محاسبه می شود.

برای این محاسبات باید به این نکته توجه نمود که دبی های جرمی عبوری از وجوه در معرض مؤلفه سرعت در راستای مختلف، جمله های ممntمی مختلفی ایجاد می نمایند. بنابراین ممntم در راستای  $x$  از وجوه ششگانه عبارت است از:

$$mom_{x+}^x = \left[ (\rho uu) + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} + \dots \right] \delta y \delta z \quad (20-1)$$

$$mom_{x-}^x = - \left[ (\rho uu) + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} \left(-\frac{\delta x}{2}\right) + \dots \right] \delta y \delta z \quad (21-1)$$

$$mom_{y+}^x = \left[ (\rho vu) + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} \left(\frac{\delta y}{2}\right) + \dots \right] \delta x \delta z \quad (22-1)$$

$$mom_{y-}^x = - \left[ (\rho vu) + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} \left(-\frac{\delta y}{2}\right) + \dots \right] \delta x \delta z \quad (23-1)$$

$$mom_{z+}^x = \left[ (\rho wu) + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} \left(\frac{\delta z}{2}\right) + \dots \right] \delta x \delta y \quad (24-1)$$

$$mom_{z-}^x = - \left[ (\rho wu) + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} \left(-\frac{\delta z}{2}\right) + \dots \right] \delta x \delta y \quad (25-1)$$

اندیس بالایی نشان دهنده ی جهت بردار ممntم محاسبه شده است. اکنون با استفاده از تعریف جرم و ممntم در حجم کنترل می توان مقدار نرخ تغییرات ممntم حجم کنترل در راستای  $x$  را محاسبه نمود، یعنی:

$$\text{نرخ افزایش ممntم حجم کنترل در راستای } x = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (26-1)$$

بنابراین برآیند ممntم در راستای  $x$  عبارت است از:

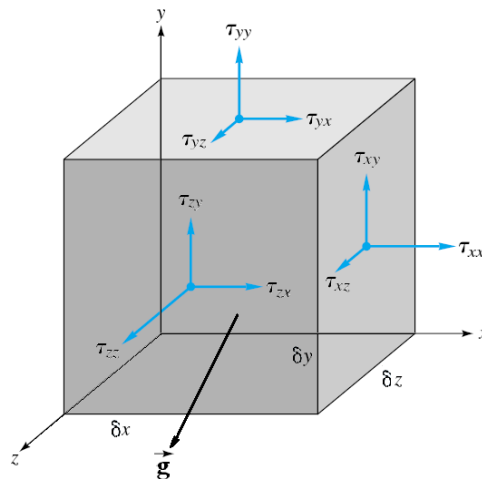
$$\sum mom^x = \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} + \dots \right] \delta x \delta y \delta z \quad (27-1)$$

به همین ترتیب می توان برآیند ممntم را در راستای  $y$  و  $z$  نوشت:

$$\sum mom^y = \left[ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} + \dots \right] \delta x \delta y \delta z \quad (28-1)$$

$$\sum mom^z = \left[ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} \dots \right] \delta x \delta y \delta z \quad (29-1)$$

در این بخش برای محاسبه طرف دیگر معادله ممنتوم یعنی نیروهای وارد بر حجم کنترل، به محاسبه نیرو در هر سطح پرداخته می‌شود. اساساً نیروهای وارد بر حجم کنترل به دو دسته بدنی و سطحی تقسیم می‌شوند. در اینجا تنها نوع نیروی بدنی مؤثر نیروی ثقل در نظر گرفته می‌شود و نیروهای سطحی ناشی از میدان تنش حاکم بر جریان است. شکل (۱-۳) نیروهای وارد بر حجم کنترل شکل ۱-۱ را به صورت نمادین نمایش می‌دهد که در آن میدان تنش روی وجوه مثبت تعریف شده و به طریقی که گفته شد مقدار نیرو در راستای  $x$  به شرح زیر محاسبه می‌شود:



شکل ۱-۳ نمایش میدان تنش و نیروی بدنی روی حجم کنترل.

$$\sum F^x = \tau_{xx} \delta y \delta z - \left[ \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} (-\delta x) \right] \delta y \delta z + \tau_{yx} \delta x \delta z - \left[ \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} (-\delta y) \right] \delta x \delta z + \tau_{zx} \delta x \delta y - \left[ \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} (-\delta z) \right] \delta x \delta y + \rho g^x \delta x \delta y \delta z + \dots \quad (30-1)$$

چند نقطه در رابطه‌ی (۱-۳۰) بیانگر جملات مرتبه‌ی بالاتر دیفرانسیلی ناشی از بسط تیلور میدان تنش است. لازم به توجه است مقادیر تنش‌ها روی وجوه منفی در جهت مخالف در نظر گرفته شده و بر حسب مقادیر تنش وجوه مثبت به کمک بسط تیلور محاسبه گردیده است. با خلاصه کردن رابطه (۱-۳۰)،

$\sum F^x$  به فرم زیر محاسبه می‌شود:



$$\sum F^x = \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g^x + \dots \right) \delta x \delta y \delta z \quad (31-1)$$

به همین ترتیب نیرو در راستاهای  $y$  و  $z$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum F^y = \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g^y + \dots \right) \delta x \delta y \delta z \quad (32-1)$$

$$\sum F^z = \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g^z + \dots \right) \delta x \delta y \delta z \quad (33-1)$$

در روابط (۳۱-۱) تا (۳۳-۱) اندیس بالایی نمایانگر جهت است. با برابر قرار دادن متناظر این روابط و روابط (۲۷-۱) تا (۲۹-۱)، معادلات دیفرانسیلی ممنتم به شکل زیر حاصل می‌شود که در آن ابعاد حجم کنترل به سمت صفر میل نموده است:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g^x \quad (34-1)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g^y \quad (35-1)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g^z \quad (36-1)$$

معادلات (۳۴-۱) تا (۳۶-۱) معروف به معادلات "ناویر" هستند. جهت به کارگیری این معادلات برای تعیین توزیع سرعت که مهمترین مسئله در سیالات بشمار می‌رود، وجود رابطه‌ای بین تنش و میدان سرعت بسیار با اهمیت می‌باشد. بدین منظور دانشمندی به نام "استوکس" در سال‌های دور (۱۹۵۸) بر اساس فرض خطی بودن روابط بین تنش و کرنش در ناحیه تغییر شکل الاستیک، روابطی بین تنش و نرخ کرنش یعنی سرعت به صورت زیر ارائه نمود:

$$\tau_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (37-1)$$

$$\tau_{yy} = -p - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (38-1)$$

$$\tau_{zz} = -p - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (39-1)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (40-1)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (41-1)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (42-1)$$

از نکات مهمی که می‌توان در فرضیات استوکس بدان اشاره کرد، انتخاب ضریب تناسب خطی بین کرنش‌های برشی و تنش‌های برشی است که به لزجت دینامیکی ( $\mu$ ) موسوم است. همچنین باید توجه داشت سیال ایزوتروپ فرض شده و رفتار مکانیکی سیال به جهت بستگی ندارد. در روابط فوق  $p$  فشار ترمودینامیکی بوده و تانسور تنش متقارن است. در اینجا امکان دارد این سؤال مطرح گردد که در شرایط ایستایی تانسور تنش (رابطه (۴۳-۱)) براساس اصل تعادل متقارن است، اما آیا در شرایط دینامیکی سیال که اساساً اصل تعادل صادق نیست، آیا بازهم تانسور تنش متقارن است؟

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (43-1)$$

در مراجع [2] و [19] اصل تقارن تانسور تنش در یک سیال جاری به اثبات رسیده است.

اشاره به واژه‌ی "تانسور" در مباحث سیالات نیز مفید است. تانسور نمایانگر خانواده‌ای از پارامترهای بیان‌کننده‌ی یک ماهیت واحد است. از این دسته می‌توان بردار را که یک تانسور مرتبه‌ی یک است نام برد. همانطور که می‌دانیم برای بیان یک بردار معرفی مؤلفه‌های آن الزامی است و لذا یک بردار با استفاده از یک اندیس مستقل بیان می‌شود. یعنی می‌توان برای بردار  $\vec{a}$  بیان زیر را بازنویسی کرد:

$$\vec{a} = a_i \hat{e}_i \quad (i = x, y, z) \quad (44-1)$$

که  $\hat{e}$  بیانگر بردار یکه و  $\hat{e}_i$  بردار یکه در یکی از جهات  $x$ ،  $y$  یا  $z$  است. در حساب تانسوری تکرار یک اندیس به معنی جمع است، یعنی با اعمال  $x$ ،  $y$  و  $z$  برای اندیس  $i$  داریم:

$$\vec{a} = a_i \hat{e}_i = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z \quad (i = x, y, z) \quad (45-1)$$

به همین شکل یک اسکالر، تانسوری از مرتبه‌ی صفر است. به همین ترتیب چون میدان تنش با اندیس‌های مربوط به سطح و جهت معین می‌گردد، ماهیت عناصر آن یک تانسور مرتبه دو است زیرا با دو اندیس بیان می‌شود و می‌توان آنرا با یک ماتریس نمایان ساخت. بنابراین می‌توان از جبر خطی و عملیات جبر ماتریس‌ها نیز استفاده نمود.

این توضیحات برای ساده نویسی معادلات ممنتم بسیار کارآمد است. در روابط (۳۴-۱) تا (۳۶-۱) جملات شامل تنش در سمت راست این معادلات را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \tau_{ij} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} & \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} & \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} & \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (۴۶-۱)$$

از سوی دیگر سمت چپ روابط یاد شده را می‌توان به فرم برداری نوشت و نهایتاً به شکل زیر داریم:

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \vec{V})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \vec{V})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \vec{V})}{\partial z} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \tau_{ij} + \rho \vec{g} \quad (۴۷-۱)$$

این معادله را می‌توان با مرتب نمودن سمت چپ و مشتقات مربوطه، ساده‌تر نمود، یعنی:

$$\underbrace{\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right)}_I + \underbrace{\vec{V} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right)}_{II} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \tau_{ij} + \rho \vec{g} \quad (۴۸-۱)$$

در رابطه‌ی (۴۸-۱) قسمت II برابر صفر است، زیرا برابر معادله‌ی پیوستگی است و قسمت I نیز به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \quad (۴۹-۱)$$

بنابراین می‌توان رابطه (۴۷-۱) را به صورت زیر بیان داشت:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \tau_{ij} + \rho \vec{g} \quad (۵۰-۱)$$

با اعمال تنش‌های استوکس معادلات ممنتم در حالت کلی و تنها با شرط پیوستگی به صورت زیر مرتب می‌شود:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -p - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (51-1)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \rho g^x$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -p - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (52-1)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \rho g^y$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \quad (53-1)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ -p - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \rho g^z$$

روابط (۵۱-۱) تا (۵۳-۱) به روابط "ناویر - استوکس" موسوم است.

این روابط برای جریان غیرقابل تراکم به شکل زیر ساده می‌شود (اثبات به عهده‌ی دانشجوین):

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \overrightarrow{\rho g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (54-1)$$

در شرایطی که در بخش‌های آتی بدان اشاره خواهد شد، برای جریان‌های غیر لزج رابطه (۵۴-۱) به شکل

زیر ساده خواهد شد و به معادلات "اوایلر" موسوم است:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \overrightarrow{\rho g} \quad (55-1)$$

## تمرینات فصل اول

۱-۱ یک میدان سرعت به صورت  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$  و  $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$  معرفی شده است، آیا برای یک جریان

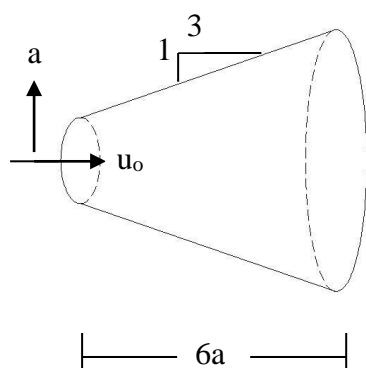
دو بعدی، غیرقابل تراکم و دائمی می‌توان چنین میدانی را متصور بود؟

۲-۱ در یک جریان دو بعدی، غیرقابل تراکم و دائمی، میدان سرعت با رابطه  $\vec{V} = x\hat{i} - y\hat{j}$  معرفی شده

است. رابطه‌ای برای شتاب این جریان ارایه نمایید.

۳-۱ در جریان داخل یک شیپوره مطابق شکل زیر عبارتی برای تغییرات شتاب در امتداد محور شیپوره

ارایه نمائید.



۴-۱ با استفاده از یک حجم کنترل مناسب، رابطه‌ی پیوستگی را برای سیستم مختصات استوانه‌ای به

دست آورید.

۵-۱ در سیستم کیک پزی، خمیر کیک از نازلی بر روی ریل متحرک پهن می‌شود. برای پخت کیک با

کیفیت مناسب، ضخامت پهن شدن کیک باید بین ۱۵ تا ۲۰ سانتی متر باشد. اگر دبی خمیر خروجی از

نازل، بر اساس دستور تولید  $0.25 \frac{m^3}{s}$  باشد، محدوده سرعت مجاز ریل را تعیین نمائید. (عرض کیک ۵

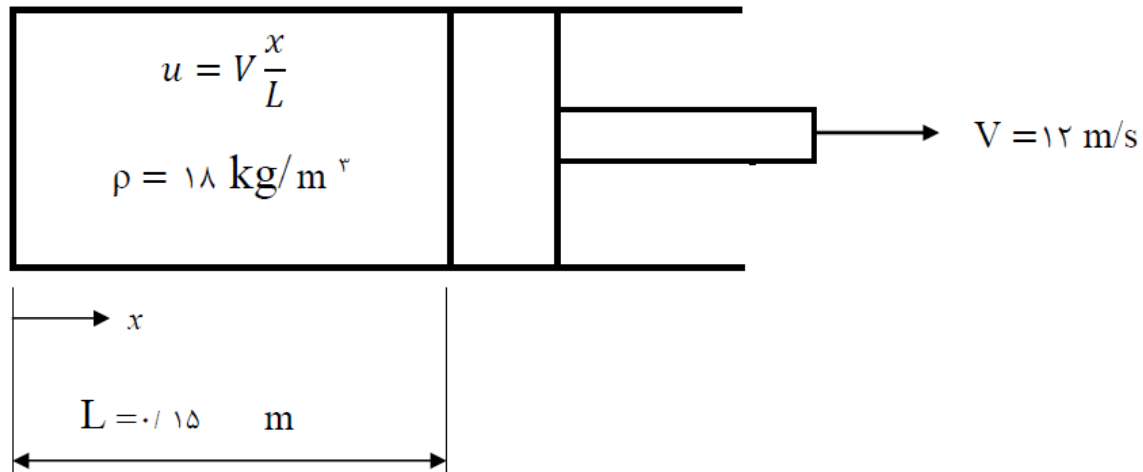
سانتی متر است.)

۶-۱ در شکل زیر در لحظه‌ای که پیستون در فاصله  $L = 0.15$  از انتهای بسته سیلندر قرار دارد، چگالی

گاز، یکنواخت و با مقدار  $\rho = 18 \text{ kg/m}^3$  است و پیستون با سرعت  $V = 12 \text{ m/s}$  از انتهای بسته شروع به

دور شدن می‌کند. حرکت گاز یک بعدی است و با فاصله از انتهای بسته متناسب است و از سرعت صفر در

انتها تا  $u = V$  در پیستون به طور خطی تغییر می‌کند. آهنگ تغییر چگالی گاز را در این لحظه بیابید. عبارت چگالی متوسط را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.



۷-۱ در جریان دائمی و غیرقابل تراکم در داخل مجاری از تقریب جریان دو بعدی استفاده می‌شود. یعنی

تنها دو متغیر مستقل تعیین کننده است. اگر میدان سرعتی به صورت  $\begin{cases} u = u_0 (1 - y^2) \\ v = 0 \end{cases}$  باشد، آیا چنین

میدانی ممکن است؟ چرا؟

۸-۱ میدان سرعتی با مولفه‌های  $u = 0$ ،  $v = -y^3 - 4z$  و  $w = 3y^2z$  معرفی شده است.

الف) این میدان چند بعدی است؟ چرا؟

ب) آیا این جریان غیر قابل تراکم است؟

۹-۱ سه مولفه سرعت در یک میدان سرعت عبارتند از:  $u = Ax + By + Cz$ ،  $v = Dx + Ey + Fz$  و

$w = Gx + Hy + Jz$  اگر قرار باشد که این مولفه‌ها میدان جریان تراکم ناپذیر ممکن را نشان دهند،

رابطه میان ضرایب  $A$  تا  $J$  را بیابید.

# فصل دوم

## تعاریف سینماتیکی جریان

## ۱-۲ تعریف خط جریان، رگه جریان، خط سیر و خط لحظه

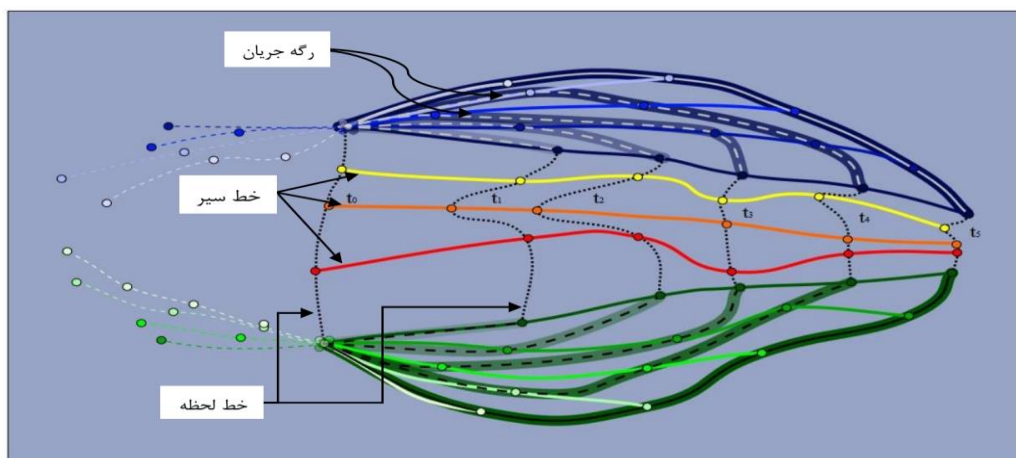
- خط جریان<sup>۱</sup>: به منحنی‌های هم خانواده‌ای که در یک لحظه، موازی بردار سرعت جریان رسم می‌شوند، خطوط جریان می‌گویند.

- رگه جریان<sup>۲</sup>: مکان هندسی تمام ذراتی از سیال است که در طی حرکت از نقطه مشترکی عبور نموده‌اند.

- خط سیر<sup>۳</sup>: مسیر عبور هریک از ذرات سیال در بازه زمانی مشخص را خط سیر گویند.

- خط لحظه<sup>۴</sup>: منحنی‌ای است که توسط یک دسته از ذرات سیال که در لحظات قبل انتخاب و شناسایی شده‌اند، به وجود آمده و در هر لحظه وضعیت ذرات را در مسیر عبور نسبت به هم نشان می‌دهد.

بر اساس تعاریف فوق، خطوط جریان در یک لحظه هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند زیرا ذرات نمی‌توانند در یک نقطه دارای دو بردار سرعت باشند. به طریق مشابه رگه‌های جریان نیز نمی‌توانند خود یا دیگر رگه‌ها را قطع نمایند، زیرا ذرات مختلف را نمی‌توان در یک لحظه و یک مکان یکسان تعریف نمود. این در حالی است که خطوط سیر می‌توانند یکدیگر را به غیر از نقاط ابتدایی و انتهایی قطع نمایند.



شکل ۱-۲- نمایش کیفی رگه جریان، خط مسیر و خط لحظه.

خطوط ممتد و خط چین مشکی رگه جریان را نشان می‌دهد. خطوط ممتد رنگی خط سیر را نشان می‌دهد. همچنین منحنی‌های نقطه چین مشکی خط لحظه را نشان می‌دهد (در لحظات  $t_0$  تا  $t_3$ ). نقاط  $A$  و  $B$  دو نقطه فرضی عبور دو دسته ذرات از این نقاط است.

<sup>1</sup> Stream Line

<sup>2</sup> Streak Line

<sup>3</sup> Path Line

<sup>4</sup> Time Line



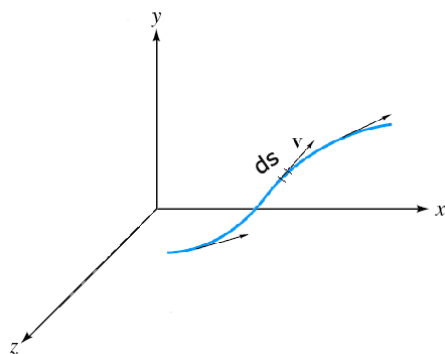
اگر به شکل ۱-۲ توجه شود، تعاریف رگه جریان، خط مسیر و خط لحظه هویدا می شود. در این شکل نقاط  $A$  و  $B$  به عنوان نقاط مبنا انتخاب شده‌اند و ذرات مشخص شده‌ای به نوبت از آن‌ها عبور نموده و به عنوان ذرات شناسایی شده ردیابی می‌گردند. همانطور که در شکل ملاحظه می‌گردد، آرایش ذرات عبوری از  $A$ ،  $B$  و ذرات دیگر بیانگر تغییرات خط لحظه، از لحظه  $t_0$  تا لحظه  $t_5$  می‌باشد (نقطه چین مشکی). در مورد رگه جریان می‌توان دریافت، اولین ذره‌ای که به طور مثال در لحظه  $t_0$  از نقطه  $A$  عبور نموده در لحظه  $t_1$  با خط چین رسم شده از نقطه  $A$  به موقعیت فعلی ذره رگه جریان را نمایش داده‌است. پس از گذشت زمان  $(t_2 - t_1)$ ، این ذره مسیر خود را طی نموده و خط سیری ترسیم نموده و ذره دومی نیز از نقطه  $A$  عبور نموده‌است، در این لحظه  $(t_2)$  منحنی ارتباط دهنده ذره اول و دوم و نقطه  $A$  رگه جریان را ترسیم می‌نماید و به همین ترتیب تا لحظه  $t_5$  رگه‌های ناشی از ذرات عبوری از نقاط  $A$  و  $B$  به همراه مسیر هریک در شکل ۱-۲ مشخص و ترسیم شده‌است.

## ۲-۲ تعابیر ریاضی خط جریان، رگه جریان، خط سیر و خط لحظه

### ۱-۲-۲ تعبیر ریاضی خط جریان

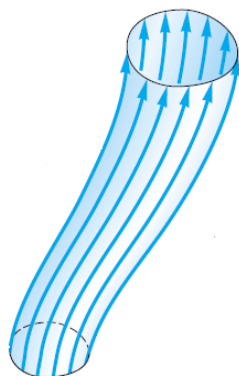
اگر میدان جریانی با سرعت  $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$  مشخص گردد و المان دیفرانسیلی  $d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$  تکه‌ای از خط جریان فرض شود، برای خط جریان بر اساس تعریف بخش ۱-۲، رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (1-2)$$



شکل ۲-۲ شماتیک خط جریان

به دسته خطوط جریانی که از یک مسیر بسته مانند C (شکل ۳-۲) عبور می‌نمایند، لوله‌ی جریان<sup>۱</sup> می‌گویند.



شکل ۳-۲ لوله‌ی جریان.

همچنین می‌توان برای خط جریان رابطه زیر را نوشت:

$$\frac{\vec{dr}}{ds} = \vec{V} \quad (۲-۲)$$

یعنی در مختصات کارتزین:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= u(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{ds} &= v(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{ds} &= w(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (۳-۲)$$

---

<sup>۱</sup> Stream Tube

مثال ۱-۲ برای جریانی که با مؤلفه‌های سرعت زیر معرفی شده‌است، معادله خط جریان را به دست آورید .

$$u = \frac{x}{1+t} ; \quad v = y ; \quad w = 0$$

حل:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x}{1+t} \Rightarrow x = c_1 \exp\left(\frac{s}{1+t}\right)$$

$$\frac{dy}{ds} = y \Rightarrow y = c_2 \exp(s)$$

فرض می‌کنیم در  $t = 0$  داریم  $x = x_0$  ,  $y = y_0$  ,  $s = 0$  در نتیجه:

$$c_1 = x_0 , \quad c_2 = y_0$$

بنابراین با حذف (s) داریم:

$$\frac{y}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^n , \quad n = 1+t$$

## ۲-۲-۲ تعبیر ریاضی خط سیر

اگر تغییر وضعیت ذره سیال را با متغیر  $\vec{r}_p$  نمایش دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_p}{dt} &= \vec{V}_p(\vec{r}_p, t) \\ \vec{r}_p(t_0) &= \vec{r}_{p_0} \end{aligned} \quad (۴-۲)$$

در رابطه فوق  $\vec{V}_p$  سرعت ذره بوده و مسلماً دیدگاه لاگرانژی، تنها مبنای سنجش حرکت می‌باشد. از این جهت تنها متغیر حرکت زمان بوده و سرعت ذره در گذر از مکان‌های مختلف با گذر زمان دچار تغییر می‌شود.

---

مثال ۲-۲ برای جریان مثال (۱-۲) خط سیر یک ذره دلخواه را محاسبه نمایید.

حل:

از روابط (۴-۲) داریم:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t} ; \quad x(0) = x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = y , \quad y(0) = y_0$$

با انتگرال گیری از روابط فوق داریم:

$$x = c_1(1+t) , \quad c_1 = x_0$$

$$y = c_2 \exp(t) , \quad c_2 = y_0$$

بنابراین:

$$\frac{x}{x_0} = 1+t$$

$$\frac{y}{y_0} = e^t$$

با حذف  $t$  داریم:

$$\frac{y}{y_0} = \exp\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)$$

### ۳-۲-۲ تعبیر ریاضی رگه‌ی جریان

همانطور که در تعریف رگه جریان بیان شد، در معادله رگه همواره بایستی اثری از گذشته یعنی نقطه‌ای که تمام ذرات مورد نظر از آن در لحظات مختلف عبور نموده‌اند تا زمان  $t$  مشخص و هویدا باشد. از سویی چون باز هم حرکت و مسیر ذرات در معادله رگه جریان تعیین کننده‌اند لذا داریم:

$$\frac{d\vec{r}_p}{dt} = \vec{V}(\vec{r}_p, t)$$

$$\vec{r}_p(t = \xi) = \vec{r}_{p_0}$$

$$\vec{r}_p = \vec{r}_p(\xi, t) \quad , \quad 0 \leq \xi \leq t$$
(۵-۲)

همانطور که در معادلات (۵-۲) مشاهده می‌شود، مکان‌یابی ذراتی که از سابقه زمانی  $t = \xi$  بین عبور اولین ذره ( $t = 0$ ) و تا لحظه فعلی ( $t = t$ ) برخورداری بوده‌اند، در شرط اولیه از مسیر ذره قرار گرفته و مسیری را تبیین می‌نمایند که همان رگه است.

---

مثال ۳-۲ در مثال ۲-۲ رگه جریان را محاسبه نمائید.

حل:

از محاسبات قبل داشتیم:

$$C_1 = \frac{x}{1+t} \quad ; \quad C_2 = \frac{y}{e^t}$$

اگر در لحظه  $t < \xi$ ، مکان ذره دلخواه ( در میان ذرات عبور کرده از نقطه مبدا )،  $x_0$ ،  $y_0$  فرض شود داریم:

$$C_1 = \frac{x_0}{1+\xi} \quad ; \quad C_2 = \frac{y_0}{e^\xi}$$

بنابراین با استفاده از معادله‌ی خط سیر:

$$x = \frac{x_0}{1+\xi}(1+t) \quad ; \quad y = \frac{y_0}{e^\xi} \exp(t)$$

با حذف  $\xi$  از دو معادله‌ی فوق، معادله‌ی رگه جریان حاصل می‌شود:

$$\xi = \frac{x_0}{x}(1+t) - 1$$

بنابراین:

$$\frac{y}{y_0} = \exp \left[ (t+1) - \frac{x}{x_0}(1+t) \right]$$

و یا:

$$\frac{y}{y_0} = \exp \left[ (1+t) \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right) \right] \quad \text{(معادله‌ی رگه جریان)}$$

## ۴-۲-۲ تعبیر ریاضی خط لحظه

تعبیر ریاضی خط لحظه نیاز مبرمی به بیان یک عبارت ریاضی نداشته و در واقع با تعیین خط سیر

مجموعه‌ای از ذرات مورد نظر می‌توان در هر لحظه دلخواه منحنی مکان (موقعیت) ذرات موردنظر را به

عنوان خط لحظه تعبیر نمود. یعنی اگر  $n$  ذره که با اندیس  $i$  مشخص شده‌اند، هریک دارای خط سیر خاص

$y_i(t) = f_i(x_{i(t)})$  باشند. لذا در لحظه  $t = \xi$  خط لحظه عبارت از منحنی مکان ذرات است، یعنی:

$$F = F\left(\sum_{i=1}^n (x_i, y_i)\right) \quad (۴-۲)$$

## ۳-۲ تعریف تابع جریان

با توجه به آنچه که در بخش ۱-۲ و ۲-۲ مطرح شد، این سؤال مطرح می‌گردد که آیا می‌توان تابعی یافت که هر مقدار آن بیانگر یک خط جریان باشد؟ برای پاسخ به این سؤال می‌توان از معادله‌ی پیوستگی و تعریف و تعبیر خط جریان بهره جست.

در یک جریان دو بعدی معادله‌ی خط جریان برابر است با:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \text{یا} \quad vdx - udy = 0 \quad (۷-۲)$$

از سویی از معادله‌ی پیوستگی نیز خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۸-۲)$$

همانطور که از ریاضیات برمی‌آید نمود یک تابع دو بعدی مثل  $\psi = \psi(x, y)$  به شکل زیر بیان می‌شود:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (۹-۲)$$

در صورتی که فرض شود  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  و  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  آنگاه رابطه (۸-۲) با فرض پیوستگی و مشتق‌پذیری  $\psi$  به

شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (۹-۲)$$

از سوی دیگر با تشکیل معادله (۷-۲) بر اساس فرض فوق، این رابطه نیز به شکل زیر تغییر می‌یابد:

$$vdx - udy = -\frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

یا به عبارتی:

$$d\psi = 0 \quad \text{یا} \quad \psi = \text{const} \quad (۱۱-۲)$$

یعنی:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

از نتایج (۲-۱۱) می‌توان دریافت که تابع  $\psi$  روی یک خط جریان مقدار ثابتی است و لذا با توجه به ارضای پیوستگی می‌توان دریافت که این نتایج همان تابعی است که هر مقدار آن نمایانگر یک خط جریان است. باید توجه کرد که وجود این تابع در جریان سه بعدی میسر نبوده و تنها در جریان‌های متقارن محوری که حالت خاصی از فیزیک‌های سه بعدی بشمار می‌رود و عملاً به دو متغیر مستقل، وابسته است، وجود تابع جریان ممکن است.

مثال ۲-۴ معادله تابع جریان  $u = x$  و  $v = -y$  را تعیین و شکل خطوط جریان را رسم کنید.

حل:

بر اساس تعریف:

$$x = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad -y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

بنابراین:

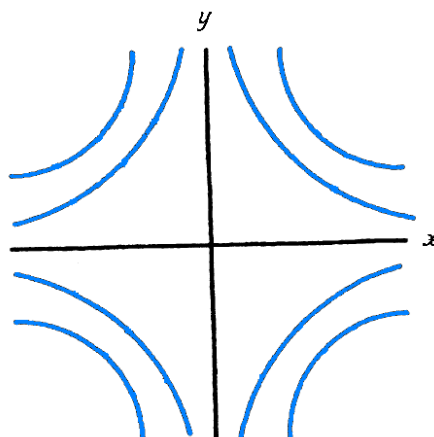
$$\psi = xy + c$$

با انتخاب  $c = 0$

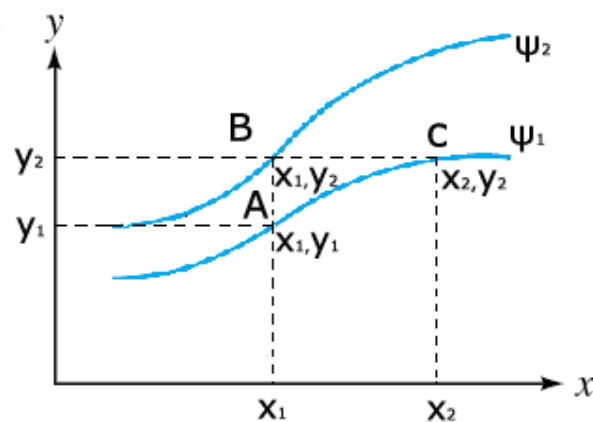
$$\psi = xy$$

در حالت ساده تر

با ترسیم  $y$  بر حسب  $x$  به ازای  $\psi$  های مختلف:



یکی دیگر از ویژگی‌های تابع جریان این است که انتخاب مبنای آن اهمیت بالایی نداشته و آنچه مهم است، اختلاف مقادیر تابع جریان است. برای روشن شدن این موضوع شکل ۴-۲ را در نظر بگیرید. در این شکل دو خط جریان از یک میدان سرعت مفروض ترسیم شده است که به ترتیب آنها را  $\psi_1$  و  $\psi_2$  می‌نامیم. در ابتدا مقطعی بین دو خط جریان عمود بر محور  $x$  ها ترسیم نموده و آن را  $AB$  می‌نامیم. دبی عبوری از این مقطع عبارت است از:



شکل ۴-۲ محاسبه دبی با مقادیر تابع جریان.

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} u dy = \int_{y_1}^{y_2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy \quad (۱۲-۲)$$

به دلیل آنکه روی  $AB$  ،  $dx = 0$  ، بنابراین:

$$d\psi = 0 + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{d\psi}{dy} \quad (۱۳-۲)$$

با ترکیب روابط (۱۲-۲) و (۱۳-۲) داریم:

$$Q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (۱۴-۲)$$

اگر از مقطع  $BC$  به موازات محور  $x$  ها استفاده شود، داریم:



$$Q = \int_{x_1}^{x_2} v dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx = -\int_{\psi_2}^{\psi_1} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (2-15)$$

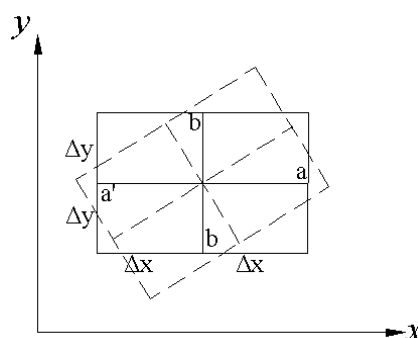
از مقایسه‌ی نتایج (۲-۱۴) و (۲-۱۵) می‌توان نتیجه گرفت مقدار دبی بین دو خط جریان برابر اختلاف مقادیر تابع جریان است. این موضوع با هر مقطع دلخواه نیز قابل تحقیق و اثبات است. لذا انتخاب مبنای تابع جریان اهمیت نداشته و آنچه مهم است اختلاف مقادیر تابع جریان است که از شرط پیوستگی جریان منشاء می‌گیرد.

## ۲-۴ حرکت چرخشی در سیال

همانگونه که بیان شد، می‌توان جریان را یک کرنش برشی بزرگ دانست و سرعت را تابع نرخ زمانی این کرنش توصیف کرد. اما در هر صورت، یک المان مادی از سیال نیز، می‌تواند دچار انتقال یا دوران گردد. نکته قابل توجه این است که سیال در حین تحمل کرنش برشی می‌تواند دوران و انتقال داشته باشد. به همین دلیل مفهوم دوران و سرعت زاویه‌ای به دلیل وقوع کرنش برشی با آنچه در دینامیک جسم صلب فراگرفته شده متفاوت است. بدین منظور پارامترهای سینماتیکی مهمی مطرح می‌گردد که به ترتیب شرح داده خواهد شد.

### ۲-۴-۱ دوران<sup>۱</sup>

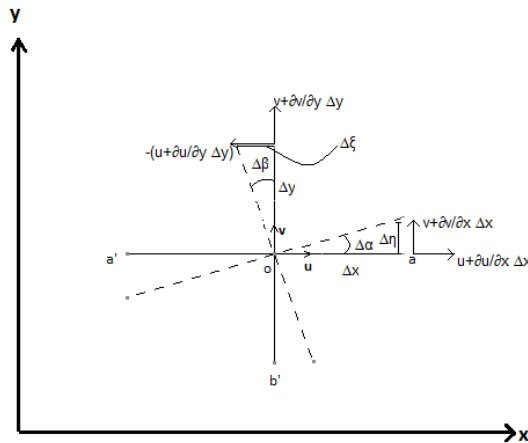
مفهوم دوران مشابه آنچه در حرکت دورانی جسم صلب سرعت زاویه‌ای نامیده می‌شود، قابل تعبیر است. به همین منظور یک المان جرمی از سیال را در نظر گرفته و در حین کرنش برشی، حرکت دورانی آن را در نظر می‌گیریم (شکل ۲-۵).



شکل ۲-۵ المان جرمی سیال در حال دوران و تغییر شکل زاویه‌ای.

<sup>۱</sup> Rotation

به دلیل سهولت و وضوح بیشتر این المان تنها با محورهای آن در شکل ۲-۶ مجددا ترسیم شده است.



شکل ۲-۶ المان جرم در حال دوران و کرنش سیال.

اگر در یک لحظه معین محورهای  $a-a'$  و  $b-b'$  بر هم عمود بوده و در نقطه  $O$  که مرکز المان است مؤلفه‌های سرعت  $v, u$  تعریف شده باشند، پس از گذشت زمان  $\Delta t$  این محورها در جهت خلاف عقربه ساعت چرخیده ولی به دلیل کرنش برشی میزان زاویه چرخش آنها یکی نخواهد بود. مقدار چرخش محور  $a-a'$ ،  $\Delta\alpha$  و محور  $b-b'$ ،  $\Delta\beta$  فرض می‌شود. از آنجایی که هدف، تعیین این تغییرات در فاصله زمانی کوچک است، می‌توان مقدار تانژانت زوایای  $\Delta\alpha$  و  $\Delta\beta$  را با خود آنها برابر دانست. لذا مقدار سرعت زاویه‌ای محور  $a-a'$  عبارت است از:

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta \eta}{\Delta x}}{\frac{\Delta t}{\Delta x}} \quad (16-2)$$

فاصله عمودی  $\Delta\eta$  نسبت به نقطه 0 با سرعت نسبی  $\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$  طی شده است بنابراین:

$$\Delta \eta = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) \Delta t \quad (17-2)$$

لذا با ترکیب (۲-۱۶) و (۲-۱۷) خواهیم داشت:

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x\right) \frac{\Delta t}{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (18-2)$$

به همین ترتیب برای محور  $b - b'$  خواهیم داشت:

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y\right) \frac{\Delta t}{\Delta y}}{\Delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (19-2)$$

لذا سرعت متوسط دوران این المان که به دوران نیز موسوم است، عبارت است از متوسط این دو سرعت زاویه‌ای یعنی:

$$\omega_z = \frac{1}{2}(\omega_{oa} + \omega_{ob}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (20-2)$$

مشابه آنچه در صفحه  $x - y$  بررسی شد می‌توان در دو صفحه دیگر کارتزین نیز انجام داد و دو مؤلفه دیگر برای  $\vec{\omega}$  تعیین نمود، یعنی:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \hat{k} \right] \quad (21-2)$$

یا به عبارت صحیح تر:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (22-2)$$

## ۲-۴-۲ چرخش<sup>۱</sup>

بی‌شک مهمترین پارامتر یا پدیده حرکتی در مکانیک سیالات چرخش است. این واژه تنها به نوع حرکت چرخشی المان سیال محدود نبوده، بلکه توجیه کننده بسیاری از مکانیزم‌های حاکم بر حرکت سیال نیز می‌باشد.

---

<sup>1</sup> Vorticity

همانطور که از دانش ریاضیات عمومی دریافتیم، کرل یک منحنی برداری، میزان یا شدت پیچش آن منحنی است. به عبارتی هرچه شدت کرل در راستاهای مختلف بیشتر باشد، میزان پیچیده شدن حول آن محور نیز شدیدتر است. به این ترتیب اگر برای مثال به طنابی که حول یک استوانه پیچیده شده بنگریم بی شک مارپیچی که ملاحظه می شود، همان کرل منحنی یا « چرخش » است. بنابراین مفهوم چرخش در عبارت زیر بیان می شود:

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (2-23)$$

این عبارت بیانگر آن است که  $\vec{\zeta} = 2\vec{\omega}$ ، اما دارای مفهومی کاملاً متفاوت بوده و اساس آن همانطور که مطرح شد، کاملاً مستقل است از آنچه که برای تعریف دوران عنوان شد. گرچه کاربرد این دو پارامتر در محاسبات بسیار نزدیک است اما چرخش در دینامیک سیالات بسیار با اهمیت و عمق بیشتری مطالعه می گردد. برای درک بیشتر این مفهوم مطالعات آتی و مباحث پیشرفته الزامی است.

مثالی از مشاهده چرخش همان دود سیگاری است که در حال بالا رفتن می پیچد و محو می شود. به عبارتی مفهوم چرخش قابل مشاهده است و پیچش دود سیگار عینیتی از چرخش محسوب می گردد. این در حالیکه دوران از جنس سرعت دورانی بوده و قابل مشاهده نیست.

## ۲-۴-۳ گردش<sup>۱</sup>

گردش یا سیرکولاسیون، میزان میل گردیدن یک میدان سیال در محدوده یک مرز مشخص است. به عبارتی:

$$\Gamma = \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad (2-24)$$

از سویی می دانیم:

$$\oint_c \vec{V} \cdot d\vec{s} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{A} \quad (2-25)$$

---

<sup>1</sup> Circulation

یعنی انتگرال خطی روی مسیر بسته  $C$  برابر عبارت سمت راست رابطه (۲-۲۵) است که یک انتگرال سطحی روی سطح بسته  $A$  مربوط به مرز  $C$  می باشد. بنابراین:

$$\Gamma = \oint_A \xi_z dA = \oint_A 2\omega_z dA \quad (۲-۲۶)$$

## ۴-۴-۲ جریان غیرچرخشی

به جریانی که  $\vec{\zeta}$  (چرخش) در میدان سرعت صفر باشد، جریان غیرچرخشی می گویند. در یک میدان غیرچرخشی نکاتی از نظر سینماتیکی وجود دارد که بسیار با اهمیت است.

الف - در یک میدان غیرچرخشی داریم:

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (۲-۲۷)$$

اثبات این رابطه بسیار ساده است. از تعریف  $\psi$  و  $\vec{\zeta}$  می توان نتیجه گرفت که در یک میدان دو بعدی:

$$\zeta = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -(\nabla^2 \psi) \quad (۲-۲۸)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۲-۲۸) در صورتیکه  $\vec{\zeta} = 0$  باشد:

$$\nabla^2 \psi = -\zeta = 0$$

ب- در یک میدان غیرچرخشی می توان سرعت را مشتق شده از یک تابع پتانسیل دانست.

اثبات این موضوع از این واقعیت آغاز می گردد که کرل گرادیان یک اسکالر صفر است، یعنی:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0 \quad (۲-۲۹)$$

از سوی دیگر در یک میدان غیرچرخشی که  $\vec{\zeta} = 0$  است، داریم:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \quad (۲-۳۰)$$

با مقایسه ی دو رابطه (۲-۳۰) و (۲-۲۹) می توان نتیجه گرفت که در یک میدان غیرچرخشی می توان سرعت را از یک تابع پتانسیل مثل  $\phi$  محاسبه نمود، یعنی:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi(x, y, z) \quad (۲-۳۱)$$

توجه داشته باشید که تابع پتانسیل محدودیت دو بعدی بودن جریان را نداشته و برای جریان‌های سه بعدی نیز قابل تعمیم است. به این ترتیب از معادله پیوستگی برای جریان غیرقابل تراکم خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \nabla^2 \phi = 0 \quad (۳۲-۲)$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که در یک میدان غیرچرخشی  $\psi$  و  $\phi$  هر دو جوابهای معادله لاپلاس بوده و بر اساس تعریف این دو تابع می‌توان ثابت کرد که این دو منحنی بر یکدیگر عمودند.

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = u dx + v dy$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

بنابراین:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\phi=const} = -\frac{u}{v} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{\psi=const} = \frac{v}{u}$$

ج- در یک میدان غیرچرخشی می‌توان از معادله برنولی بین هر دو نقطه دلخواه استفاده کرد.

از رابطه ناویر-استوکس در حالتی که اثرات لزجت صفر است، می‌توان معادله اوایلر را نتیجه گرفت:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p \quad (۳۳-۲)$$

به این ترتیب بر اساس رابطه مشتق اساسی نیز داریم:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \quad (۳۴-۲)$$

از سویی با توجه به روابط قابل اثبات ریاضی داریم:

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \vec{\zeta} \times \vec{V} \quad (۳۵-۲)$$

با قرار دادن روابط (۳۴-۲) و (۳۵-۲) در رابطه (۳۳-۲) و ضرب داخلی رابطه در بردار تغییر وضعیت  $\overrightarrow{dr}$  داریم:

$$\left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \vec{\zeta} \times \vec{V} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{g} \right] \cdot d\vec{r} = 0 \quad (۳۶-۲)$$

لذا برای یک جریان پایدار زمانی غیرقابل تراکم و غیرچرخشی، حاصل این رابطه با فرض  $\vec{g} = -g\hat{k}$  عبارت است از:

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{1}{2} V^2\right) + gdz = 0 \quad (۳۷-۲)$$

که با انتگرال گیری داریم:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = \text{const} \quad (۳۸-۲)$$

بنابراین در یک میدان غیرچرخشی، پایدار زمانی و غیرقابل تراکم، معادله برنولی بین هر دو نقطه دلخواه برقرار است.

**مثال ۱-۲** در یک میدان سرعت که با روابط زیر بیان می گردد، مقدار چرخش، تابع جریان و در صورت غیرچرخشی بودن تابع پتانسیل را محاسبه و شکل الگوی جریان را رسم نمائید.

$$u = a(x^2 - y^2) \quad , \quad v = -2axy \quad , \quad w = 0$$

**حل:**

$$\vec{\zeta} = (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -2ay + 2ay = 0 \quad (\text{جریان غیر چرخشی است})$$

بنابراین بر اساس تعریف تابع پتانسیل داریم:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = ax^2 - ay^2$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2axy$$

لذا خواهیم داشت:

$$\phi = \frac{ax^3}{3} - axy^2 + f(y)$$

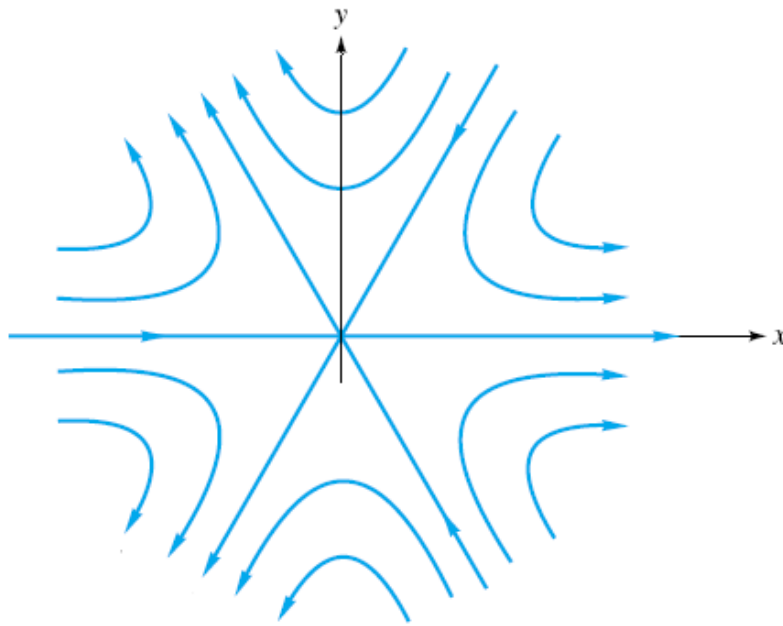
و از مقایسه ی روابط برای سرعت ها:

$$f(y) = c$$

و به همین ترتیب:

$$\psi = ax^2y - \frac{ay^3}{3} + c$$

(تمرین برای دانشجویان)



نکته قابل توجه دیگری که می‌توان برای کاربرد معادله برنولی در یک جریان چرخشی بدان اشاره نمود به یک واقعیت ترمودینامیکی باز می‌گردد. جملات معادله برنولی در واقع همان انرژی مکانیکی جریان نام می‌گیرد و انرژی مکانیکی جریان یعنی انرژی که می‌توان با سیال تبادل نمود و باز اگر با دقت بیشتری به آن پردازیم جملات فشار و ثقل در واقع منابع بازدهی و ذخیره انرژی جنبشی سیال بوده و ذرات انرژی مکانیکی همان انرژی جنبشی سیال است.

در واقع تنها مسیری که می‌توان با سیال کار تبادل نمود همان انرژی جنبشی است و از لحاظ ترمودینامیکی، وقتی طی فرآیندی بدون تبادل کار این انرژی (انرژی مکانیکی) که جمع سه جمله معادله برنولی است ثابت می‌ماند، یعنی کاری تلف نشده است و فرآیند ایزنتروپیک است. بنابراین یک جریان غیرچرخشی قطعاً یک فرآیند ایزنتروپیک تعبیر می‌گردد.



## تمرینات فصل دوم

۱-۲ برای جریانی که با میدان سرعت زیر تعریف می‌شود، معادلات خط جریان، خط سیر و رگه جریان را محاسبه نمایید.

$$u = \frac{x}{1+t}, \quad v = \frac{y}{1+t}, \quad w = 0$$

۲-۲ در جریانی میدان سرعت به صورت زیر تعریف می‌شود معادلات خط جریان، خط سیر و رگه جریان را محاسبه نمایید.

$$u = x, \quad v = y, \quad w = 0$$

آیا در این جریان تشابهی بین معادلات مشاهده می‌شود؟

۳-۲ میدان سرعت جریان تراکم ناپذیری به صورت  $u = a(x^2 - y^2)$ ،  $v = -2axy$  و  $w = 0$  داده شده است. تعیین نمایید:

(الف) میدان تحت چه شرایطی در معادلات ناویر – استوکس صدق می‌کند؟

(ب) میدان چرخشی است یا غیر چرخشی؟

(ج) تابع جریان؟

(د) توزیع فشار حاصل از میدان را اگر  $(g_z = -g, g_y = g_x = 0)$  باشند؟

(ه) ثابت کنید معادله توزیع فشار، همان معادله برنولی است؟

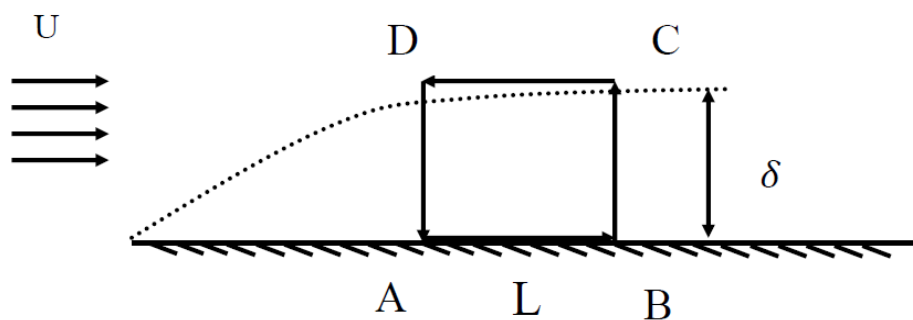
۴-۲ میدان سرعت  $\vec{V} = Axy\vec{e}_1 + By^2\vec{e}_2$  را در نظر بگیرید که  $A=4$  و  $B=-2$  و مختصات برحسب متر

است در منحنی محدود به  $x=0$ ،  $x=1$ ،  $y=0$  و  $y=1$  تعیین نمایید:

(الف) چرخش؟

(ب) مقدار گردش؟

۵-۲ در جریان لزج روی اجسام لایه مرزی تشکیل می‌گردد. برای مسیر  $ABCD$  مقدار گردش را در صورتی که سرعت جریان آزاد  $U$  باشد حساب کنید.



# فصل سوم

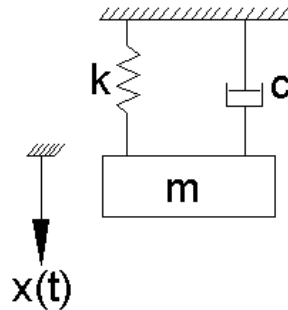
مفهوم لایه‌مرزی و طبقه‌بندی جریان‌ها

### ۱-۳ مفهوم لایه مرزی

می‌توان مفهوم لایه مرزی را گسترده‌تر از علم مکانیک سیالات دانست و شاید بهتر آن است که ریشه این مفهوم را در ریاضیات و در مبحث معادلات دیفرانسیل بیان داشت.

#### ۱-۳-۱ لایه مرزی در یک معادله دیفرانسیل

برای درک بهتر مفهوم لایه مرزی در یک معادله دیفرانسیل به معادله ارتعاش آزاد جرم  $m$  که در شکل (۱-۳) نشان داده شده‌است، توجه کنید.



شکل ۱-۳- ارتعاش آزاد جرم  $m$ .

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (۱-۳)$$

برای این معادله دیفرانسیل به جای دو شرط اولیه دو شرط حدی زمانی در نظر گرفته می‌شود تا بتوان مفهوم لایه مرزی را ارزیابی و معرفی نمود. این دو شرط عبارتند از:

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \quad (۲-۳)$$

در صورتی که در این مسئله ضریب بالاترین مرتبه معادله دیفرانسیل یعنی  $m$  خیلی کوچک باشد، یعنی در صورتی که  $m \ll 1$  می‌توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$c\dot{x} + kx = 0 \rightarrow \frac{\dot{x}}{x} = -\frac{k}{c}$$

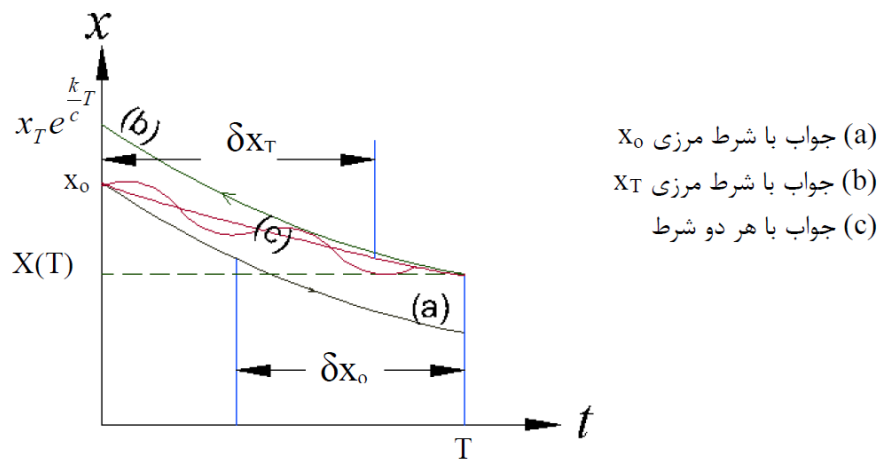
$$x(0) = x_0, x(T) = x_T$$

$$\dot{x}(t) = C_1 e^{-\frac{k}{c}t}$$

$$\text{اگر } x(0) = x_0 \rightarrow C_I = x_0 \rightarrow x(t) = x_0 e^{\frac{-k}{c}t} \quad (a)$$

$$\text{اگر } x(T) = x_T \rightarrow C_I = x_T e^{\frac{k}{c}T} \rightarrow x(t) = x_T e^{\frac{k}{c}(T-t)} \quad (b)$$

بنابراین دو جواب مستقل با دو شرط حاصل می‌گردد که شکل ۲-۳ نمایشی از این دو جواب است. ملاحظه می‌گردد که چون مرتبه‌ی دوم معادله دیفرانسیل حذف شده هر یک از دو جواب (a) و (b) خطا داشته و در مجاورت مرز دیگر از جواب واقعی (c) فاصله می‌گیرند. به فاصله‌ای از محور t که جواب از جواب اصلی فاصله معنی داری می‌گیرد، لایه مرزی می‌گویند. بنابراین فاصله جواب معادلات مرتبه اول از معادله اصلی مرتبه دوم در مرزهایی که در شرط اولیه لحاظ نشده‌اند، مفهوم لایه مرزی را رقم زده است.



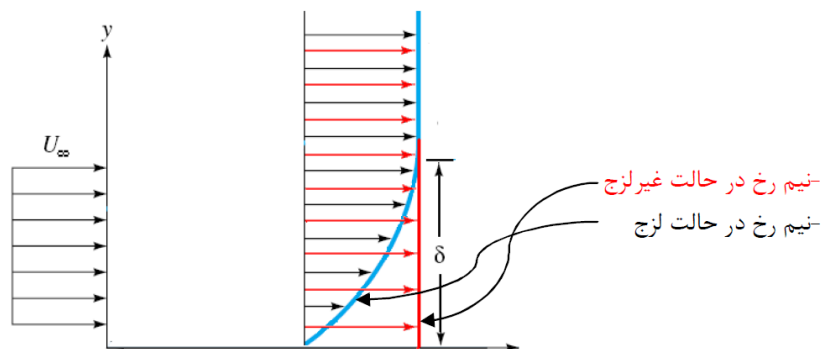
شکل ۲-۳ جواب معادله‌ی ارتعاش آزاد جرم m.

### ۳-۱-۲ مفهوم لایه مرزی با استفاده از معادلات ناویر - استوکس

با یادآوری معادلات ناویر - استوکس به عنوان نمونه در جریان غیرقابل تراکم به تشریح این بخش می‌پردازیم.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (۳-۳)$$

همانطور که در معادله (۳-۳) مشاهده می‌شود،  $\mu$  ضریب دیفرانسیل مرتبه دوم معادله است. به عنوان مثال اگر جریان روی یک صفحه تخت مد نظر باشد. نیم رخ سرعت در شکل ۳-۳ همانند منحنی داخلی خواهد بود. زیرا شرط عدم لغزش در یک جریان لزج شرطی رایج و عمومی است، یعنی:  $u=0$  ;  $y=0$ .



شکل ۳-۳ جریان روی یک صفحه تخت و مقایسه نیم‌رخ سرعت در حالت لزج و غیرلزج.

در صورتی که جریان غیرلزج فرض شود، معادلات به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P \quad (۴-۳)$$

که قبلاً آن را معادله اوایلر نامیدیم. توجه شود که شرط مرزی دیگر یعنی  $u(\infty) = u_\infty$  :  $y \rightarrow \infty$  نیز دومین شرط این جریان است. با استفاده از این شرط، جواب حاصل از معادلات اوایلر برای جریان غیرلزج همانند جوابی است که در بخش قبل از حل معادله مرتبه یک حاصل شد و فاصله دو جواب لزج و غیرلزج در مرز صلب یعنی در مجاورت شرط،  $u(0)=0$ ، همان لایه مرزی خواهد بود که ضخامت آن در شکل ۳-۳ با  $\delta$  نمایش داده شده است.

به همین دلیل می‌توان لایه مرزی در مجاورت یک جسم که تحت جریان یک سیال قرار می‌گیرد را فاصله اثرات لزجت دانست. البته آنچه مسلم است این اثر تا فاصله دوردست ادامه دارد ولی معمولاً از فاصله  $\delta$  به بعد آنقدر این اثرات ناچیز است که عملاً آن را صفر در نظر گرفته و این فاصله محدود را لایه مرزی می‌نامند. اگر کمی بیشتر دقیق شویم، درمی‌یابیم که تنها  $\mu$  عامل به وجود آمدن لایه مرزی نبوده و با وجود لازم بودن وجود آن برای رخ دادن ناحیه لایه مرزی در جریان، باید عامل دوم یعنی شرط عدم لغزش را نیز مدنظر قرار داد. لذا می‌توان نتیجه گرفت اثرات لزجت یک سیال تنها زمانی هویدا می‌گردد که جریان در مجاورت جسمی قرار گرفته باشد و به دلیل شرط عدم لغزش، این اثرات دیده شده و به تعبیر گویاتر لایه مرزی تولید شود. تعبیر موازی دیگری که می‌توان از لایه مرزی ارائه داد این است که در واقع مکانیزمی می‌باشد که اثر شرط عدم لغزش را عمود بر جریان به درون آن تسری و نفوذ داده و تا فاصله‌ی محسوسی آن را پیش برده است. آنچه مسلم است تنها جمله‌ای که دو شرط جریان را دریافت می‌کند و به میدان تسری می‌دهد همان جمله‌ی  $\nabla^2 V$  است که هر چه  $\mu$  قوی‌تر باشد، این فاصله‌ی نفوذ یعنی همان لایه مرزی بزرگتر است. به همین دلیل و دلایل دیگری که در بخش آتی بیان می‌گردد جمله‌ی مرتبه‌ی دوم در معادلات ناویر – استوکس را جمله‌ی نفوذ می‌نامند.

### ۳-۱-۳ رابطه‌ی بین لایه مرزی و چرخش

اگر یک جریان دو بعدی و یک سوپه مانند جریان با رینولدز نسبتاً بالا روی یک صفحه تخت را در شرایط غیرقابل تراکم در نظر بگیریم، تنش برشی روی دیواره با مقدار چرخش روی دیواره متناسب است، یعنی:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \cong -\mu \zeta \quad (۵-۳)$$

(زیرا در این جریان  $\nu$  نسبت به  $u$  ناچیز است.)

در سایر جریان‌ها نیز می‌توان رابطه‌ی مستقیمی بین تنش برشی و تولید مقدار چرخش برآورد نمود. لذا با توجه به اینکه مقدار تنش برشی روی دیواره‌ی جریان همواره ماکزیمم است، می‌توان نتیجه گرفت که مقدار چرخش و در نتیجه نیروی اصطکاک روی دیواره نیز حداکثر بوده و با دور شدن از دیواره که نیم‌رخ سرعت

به شیب صفر نزدیک می‌شود، یعنی روی لبه‌ی لایه‌ی مرزی به مقدار  $\frac{\partial u}{\partial y} \approx 0$  تقرب می‌یابد، و تنش برشی و مقدار چرخش نیز صفر می‌گردد. به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت لایه مرزی در واقع ناحیه وجود چرخش در اثر تماس یک جریان لزج با دیواره آن است. همچنین می‌توان دریافت که اثر لزجت در واقع همان چرخش است و آنچه که از سطح داخل جریان تسری و نفوذ می‌یابد همان چرخش است. از سوی دیگر می‌توان نتیجه گرفت جریان لزج در مجاورت یک دیواره تا فاصله  $\delta$  کاملاً چرخشی بوده و در مقابل جریان بیرون از لایه مرزی با وجود  $\mu$  غیرچرخشی است.

### ۲-۳ طبقه‌بندی جریان‌های لزج از نقطه نظر عدد رینولدز

برای طبقه‌بندی جریان‌های لزج برای سهولت ارایه نتایج از فرم جریان‌های غیر قابل تراکم استفاده می‌شود. همچنین برای بیان گویاتر، معادلات جریان را به شکل بی بعد مجدداً مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای بی بعد سازی جریان، فرضیات زیر لحاظ می‌شود:

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, z^* = \frac{z}{L}, u^* = \frac{u}{u_\infty}, v^* = \frac{v}{u_\infty}, w^* = \frac{w}{u_\infty}, p^* = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2}, t^* = \frac{tL}{u_\infty} \quad (۶-۳)$$

$$\vec{V}^* = L\vec{V}$$

با اعمال روابط فوق در معادلات ناویر استوکس غیرقابل تراکم داریم:

$$\frac{D\vec{V}^*}{Dt^*} = \frac{1}{Fr} - \vec{\nabla}^* P^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \vec{V}^* \quad (۷-۳)$$

در جریان‌هایی که سطوح آزاد و امواج گرانشی مطرح نیست،  $\frac{1}{Fr}$  از معادلات حذف می‌گردد.

به این ترتیب در جریان‌های با رینولدز بالا داریم:

$$\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial z^*} = -\vec{\nabla}^* P^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \vec{V}^* \quad (۸-۳)$$

که در آنها:



$$Fr = \frac{u_{\infty} L}{g}, \text{ Re} = \frac{u_{\infty} L}{\nu} \quad (9-3)$$

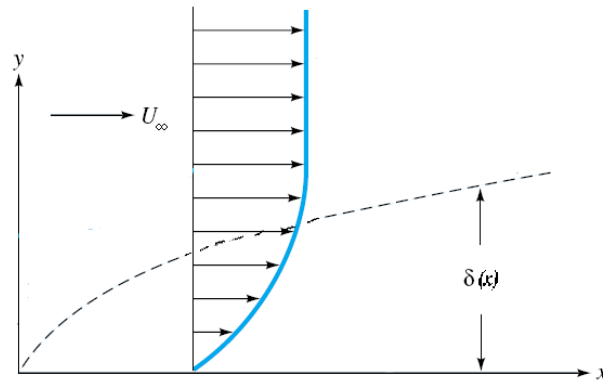
البته بودن جمله  $\frac{1}{Fr}$  در معادلات هیچ مانعی برای تحلیل‌های این بخش به همراه ندارد.

در جریان‌هایی که عدد رینولدز بسیار کوچک است، یعنی  $Re \ll 1$  جمله‌ی مرتبه دوم بسیار بزرگ شده و عموماً در چنین جریان‌هایی از جملات سمت چپ صرف‌نظر نموده و این جریان‌ها را اصطلاحاً جریان‌های «خزشی» می‌نامند. از این نوع جریان‌ها می‌توان ریختن اشک از روی گونه، شره کردن رنگ روی دیواره‌ی صاف، افتادن یک ریگ در آب و عبور نفت از لایه‌های سنگی زیر زمینی را مثال زد.

- عکس حالت فوق زمانی رخ می‌دهد که  $Re \gg 1$  یعنی رینولدز بزرگ باشد، در این حالت با وجود آن که جملات سمت چپ خیلی بزرگتر از جمله نفوذ هستند، اما به دلیل آنکه نمی‌توان وجود لایه مرزی و تنش برشی دیواره را نادیده گرفت، در محاسبات جریان لزج باید جمله نفوذ حفظ شود و قابل صرف‌نظر کردن نیست. اما چنین جریان‌هایی دارای فرض‌های ساده شونده دیگری هستند که در آینده ارایه خواهند شد و به این جریان‌ها که لایه مرزی نازک بوده و معمولاً  $Re > 1000$  است، «جریان‌های لایه مرزی» می‌گویند.

### ۳-۳ تقسیم‌بندی جریان از نقطه نظر لایه مرزی

با مطالعه دقیق‌تر تئوری لایه مرزی می‌توان دریافت که در هنگام عبور جریان از روی یک جداره، تولید چرخش با رشد لایه مرزی همراه است. یعنی با عبور جریان از روی جسم به سمت پائین دست جریان لایه مرزی دارای نرخ رشد است. البته اثبات ریاضی این امر در فصول آتی ارایه می‌گردد، اما با فرض صحت این ادعا، لایه مرزی شبیه آنچه در شکل ۳-۴ آمده است، خواهد بود.

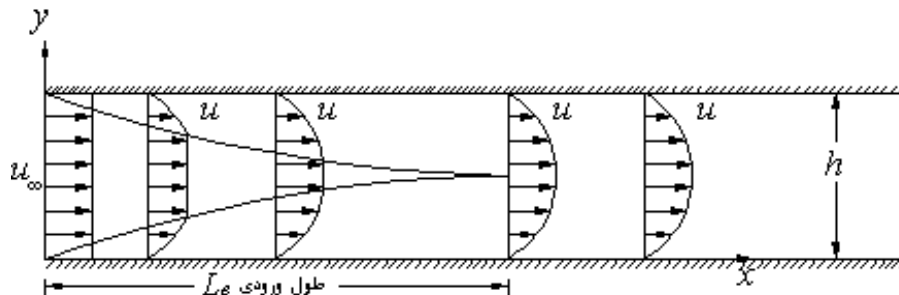


شکل ۳-۴ رشد لایه مرزی.

جریان‌هایی که همواره در امتداد جریان، لایه مرزی به عنوان مرزی بین جریان لزج و بخش غیرلزج (غیرچرخشی) قابل مشاهده است و همواره شرایط مرزی در جهت عمود بر جریان، شرط عدم لغزش و شرط جریان آزاد است، جریان‌های لزج خارجی می‌نامند.

همانطور که گفته شد این نوع جریان‌ها از نقطه نظر تغییرات عدد رینولدز خود به دسته‌هایی مثل جریان‌های «لایه مرزی» و «جریان خزشی» تقسیم می‌شوند.

در صورتی که در مجاورت جسم شکل ۳-۴، و در فاصله‌ای به اندازه‌ی کافی نزدیک، جسم مشابهی قرار گیرد، این احتمال وجود دارد که در طول اجسام با رشد لایه‌های مرزی، ناحیه غیرچرخشی به صفر رسیده و تمام ناحیه مملو از چرخش گردد و در واقع دیگر رشد و مرزی برای تفکیک ناحیه چرخشی و غیرچرخشی نتوان قایل شد.



شکل ۳-۵ شکل ناحیه‌ی ورودی.

همانطور که در شکل (۳-۵) ملاحظه می‌گردد، جریان یکنواختی با سرعت  $u_\infty$  وارد محدوده دو صفحه بینهایت شده و به دلیل تولید چرخش روی سطوح و بسته به مقدار عدد رینولدز، لایه مرزی تولید می‌شود و رشد می‌نماید، بطوریکه نیم‌رخ سرعت  $u$  در امتداد  $x$  تا فاصله  $L_e$  دچار تغییر می‌گردد. از این فاصله به بعد،

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ نیم رخ سرعت ثابت مانده و در واقع}$$

از آنجایی که نرخ رشد لایه مرزی کاملاً به عدد رینولدز وابسته است، طول  $L_e$  نیز وابستگی کامل به عدد رینولدز داشته و البته فاصله ( $d$ ) نیز عملاً یک فاکتور تعیین کننده می باشد. کیفیت رشد لایه مرزی در ورود جریان در لوله ها مشابه جریان عبوری از بین دو صفحه تخت موازی می باشد. نمایی از جریان ورودی در یک لوله در شکل ۳-۶ نشان داده شده است. بر این اساس رابطه ای برای طول ورودی در لوله ها پیشنهاد شده است:

$$\frac{L_e}{d} \approx 0.06 \text{Re}_d \quad \text{جریان آرام} \quad (۱۰-۳)$$

$$\frac{L_e}{d} \approx 0.04 \text{Re}_d^{1/6} \quad \text{جریان آشفته} \quad (۱۱-۳)$$

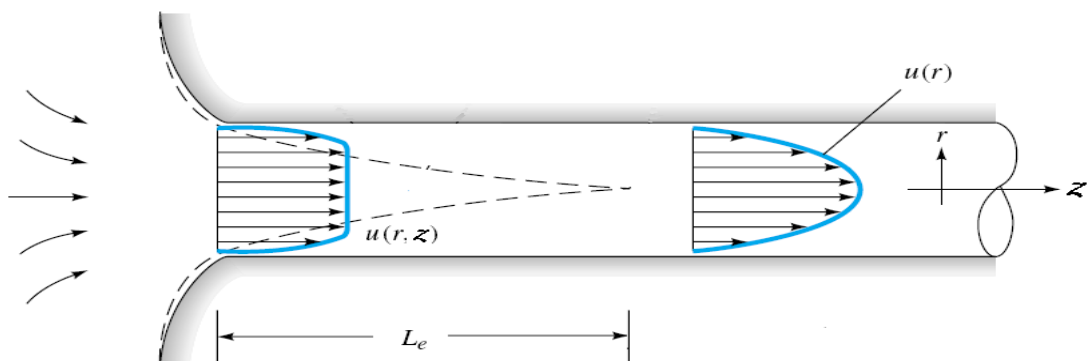
در روابط فوق  $d$  قطر لوله بوده و  $\text{Re}_d$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{Re}_d = \frac{\bar{V}d}{\nu} \quad (۱۲-۳)$$

و  $\bar{V}$  سرعت متوسط جریان است، یعنی:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} \quad (۱۳-۳)$$

در این جریان ها حد رینولدز بحرانی یعنی مرز بین رژیم آرام و آشفته حدود  $\text{Re}_d = 2300$  در نظر گرفته می شود که تا این حد می توان از رابطه (۱۰-۳) استفاده کرد و پس از آن از رابطه (۱۱-۳) می توان بهره جست.



شکل ۳-۶ ناحیه ی ورودی در یک لوله.

جریان‌هایی که نیم‌رخ سرعت در آنها در یک مجرا به دلیل محدود شدن طول ورودی نسبت به محور طولی جریان ثابت باقی می‌ماند، «جریان توسعه یافته»<sup>۱</sup> نامیده می‌شود. لذا جریان‌های توسعه یافته تنها در داخل مجاری رخ می‌دهند و به همین دلیل بخش «جریان لزج داخلی» معطوف به این نوع جریان‌ها است. بنابراین از نظر رشد لایه مرزی و تأثیر آن بر روش‌های حل معادلات می‌توان دو نوع جریان داشت:

۱- جریان لزج خارجی (روی اجسام)

۲- جریان لزج داخلی (توسعه یافته)

هریک از دسته‌های فوق در بخشی جداگانه مطالعه خواهد شد.

### ۳-۴ دسته‌بندی جریان‌های آرام<sup>۲</sup> و آشفته<sup>۳</sup>

بحث تعریف جریان‌های آرام و آشفته به قدری مفصل و گسترده است که نمی‌توان آن را در بخش کوچکی از این فصل جای داد. طبیعی است که کلیه سؤالات برآمده از این بخش در یک کتاب مکانیک سیالات قابل پاسخ نبوده و نیاز به مباحث پیشرفته و عمده‌تر در سطوح تحصیلات تکمیلی است. بنابراین با محدود نمودن انتظارات می‌توان به حداقل تعاریف و روابط بسنده نمود که در فصول آتی راه گشای موضوعات موردنظر باشد و مفاهیم ریشه‌ای جریان آشفته و بحث‌های مربوط به آن را به فرصت دیگری موکول نمود. با این مقدمه با توجه به تعریف چرخش می‌توان رابطه زیر را برای حرکت «چرخش» از معادله ممتم استخراج نمود:

$$\frac{D\vec{\xi}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\xi} + (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (۳-۱۴)$$

این معادله معروف به معادله «هلمهولتز» است. این معادله با کرل گرفتن از معادله ناویر – استوکس غیرقابل تراکم به دست می‌آید. در معادله (۳-۱۳) سه جمله ملاحظه می‌گردد: جمله اول سمت چپ نشان دهنده‌ی جابجایی «چرخش» بوده و مؤید این واقعیت است که با تولید چرخش روی سطح جداره، مکانیزمی از جابجایی آن را به سمت پائین دست جریان هدایت می‌کند. در سمت راست این معادله جمله سمت چپ

<sup>۱</sup> Fully Developed Flow

<sup>۲</sup> Laminar

<sup>۳</sup> Turbulent

معرف مکانیزم نفوذ و تسری پیدا کردن چرخش در جریان است که به نوعی در واقع عامل اصلی رشد لایه مرزی نیز محسوب می‌شود. عبارت سمت راست، معرف مکانیزم کش و قوس «چرخش» است. عبارت  $\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \zeta$ ، در واقع نرخ تولید چرخش نیز محسوب می‌گردد و در فرض جریان دو بعدی این عبارت صفر می‌شود. اثبات این رابطه و مباحث مربوط به آن در کتب سطوح پیشرفته قابل مطالعه است. باید توجه نمود علاوه بر تمام این نکات، «چرخش» به عنوان یک پدیده سینماتیکی تنها مطرح نبوده و دارای هویتی دینامیکی است و به عبارتی بخشی از جرم جریان را به خود اختصاص داده و موجب حرکت دورانی آن می‌گردد. مباحث و مطالعات زیادی درباره شناخت و حرکت چرخش (ورتنی سیتی) در مراجع ارایه شده و همچنان شناخت ورتنی سیتی یکی از مباحث روز تحقیقاتی دنیاست.

با این مقدمه و با در نظر گرفتن ماهیت دینامیکی و رفتار چرخش، می‌توان جریان آشفته را یک ناپایداری کامل دینامیکی در چرخش‌های لایه مرزی دانست. اگر چرخش شبیه به استوانه‌ای محدود و با گردش حول محور آن فرض شود، این استوانه با قطری بسیار کوچک و سرعت دورانی بسیار بالا (مقدار چرخش) از روی جداره تولید شده و در حین شسته شدن به طرف پائین دست به سمت داخل جریان نفوذ نموده و با مکانیزم کش و قوس تحت تأثیر لزجت از دور آن کاسته شده و با اتکا به بقاء اندازه حرکت دورانی، قطر آن افزایش می‌یابد.

شکل ۳-۷ وضعیت شماتیک شبه استوانه‌های چرخش یا کرم‌های چرخش را نشان می‌دهد که از جداره به طرف لبه لایه مرزی بزرگتر شده و از سرعت دورانی آنها کاسته می‌شود و از روی لبه‌ی لایه‌ی مرزی به بعد عملاً از حرکت دورانی بازمانده و از بین می‌روند.



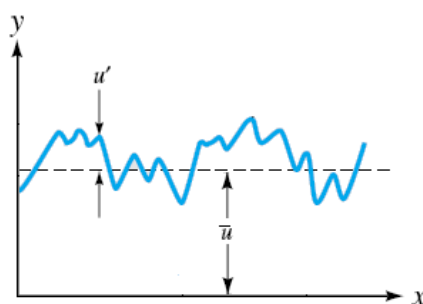
شکل ۳-۷ شبه استوانه (کرم) های چرخش.

نظمی که در شکل ۷-۳ مشاهده می‌شود و بیانگر چیدمان لایه‌ای «چرخش» است و نوعی تعبیر نگاره‌ای از جریان آرام<sup>۱</sup> است. اگر کرم‌های «چرخش» دچار ناپایداری دینامیکی شوند و دچار حرکت‌های نوسانی خود پایا گردند، به چنین جریانی جریان آشفته<sup>۲</sup> می‌گویند.

جریان آشفته دارای چند ویژگی مهم است:

۱- جریان آشفته همواره ناپایدار زمانی است.

این موضوع را می‌توان در مشاهدات تجربی سرعت در یک نقطه از لایه مرزی آشفته که به طور شماتیک در شکل (۷-۳) ترسیم شده است، مشاهده کرد.



شکل ۸-۳ شماتیک سرعت نوسانی در جریان آشفته.

همانطور که از شکل (۸-۳) پیداست می‌توان در جریان آشفته، سرعت را به دو بخش متوسط زمانی و نوسانی تفکیک کرد، یعنی:

$$u = \bar{u} + u' \quad (۱۵-۳)$$

و همچنین:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u dt \quad (۱۶-۳)$$

بنابراین ملاحظه می‌گردد ماهیت ناپایداری دینامیکی کرم‌های چرخش باعث نوسانات  $u'$  بوده و لذا در جریان آشفته هیچگاه  $u'$  صفر نیست و این رژیم همواره ناپایدار زمانی است.

<sup>۱</sup> Laminar

<sup>۲</sup> Turbulent

۲- جریان آشفته، بی نظم است:

واژه‌ی بی نظم در جریان آشفته و مکانیک غیرخطی، اساساً به شرایطی گفته می‌شود که یک متغیر مثل  $u$  هیچگاه در الگوی زمانی خود (شکل ۳-۷) دارای رفتار تکراری و یا تکرار الگو، حتی یک الگوی تکراری نوسانی نیز نباشد. این موضوع در تمام پارامترهای جریان آشفته و حتماً در پدیده‌های ماکروسکوپی قابل ارزیابی است. به عنوان مثال، هیچگاه شکل گردابه‌های پشت یک سیلندر در جریان آشفته در لحظات مختلف مشابه یکدیگر نمی‌باشد.

۳- جریان آشفته سه بعدی است:

در جریان آشفته حتی در فیزیک‌هایی که فرض جریان دو بعدی برای متوسط جریان صادق است، ترم‌های نوسانی  $u'$ ،  $v'$  و  $w'$  هیچیک قابل اغماض نبوده و نمی‌توان آنها را کوچک دانست. یعنی حتی اگر  $\overline{w} = 0$  باشد  $w'$  صفر نیست و در برابر  $u'$  و  $v'$  مقداری قابل توجه دارد. لذا همواره یک جریان آشفته سه بعدی است.

۴- جریان آشفته خود پایاست<sup>۱</sup>:

چون جریان آشفته در ناپایداری کامل کرم‌های چرخش تجلی می‌یابد، مکانیزم تداوم این رژیم نیز همانند دیگر انواع ناپایداری‌های دینامیکی همواره در جهت مصرف انرژی برای تداوم ناپایداری یک‌سویه پیش می‌رود و لذا خود پایاست.

### ۳-۵ دسته‌بندی جریان قابل تراکم و غیرقابل تراکم

شاید در اولین برداشت از این نوع دسته‌بندی به این نتیجه برسیم که تنها تفاوت جریان‌های قابل تراکم و غیرقابل تراکم در تغییرات  $\rho$  خلاصه می‌شود. این برداشت تا حدودی صحیح است اما برداشتی محدود تلقی می‌گردد.

اساساً در جریانی که تغییرات  $\rho$  در مقایسه با تغییرات سرعت و فشار ناچیز باشد و به عبارتی  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \approx 0$  برقرار باشد، آن جریان را می‌توان غیرقابل تراکم دانست و این در خصوص مایعات و حتی گازهایی که نسبت

---

<sup>1</sup> Self Sustaining

سرعت جریان به سرعت صوت در آنها کمتر از  $0.3$  باشد نیز صادق است. به همین دلیل در جریان‌های غیرقابل تراکم آدیاباتیک، نیازی به حل کردن معادله انرژی نبوده و معادلات بقای جرم و ممنتوم برای تحلیل جریان کفایت می‌کند، یعنی:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

$$\rho \cong \text{const}$$

اما در جریان‌های قابل تراکم حتی در صورت آدیاباتیک بودن جریان، به دلیل تغییرات  $p$ ، اولاً نیاز به استفاده از معادله‌ی کمکی حالت، الزامی بوده و ثانیاً تغییرات دیگر خواص ترمودینامیکی به دلیل تغییرات  $p$  و  $\rho$  قابل توجه گردیده و حتماً معادله‌ی انرژی باید در کنار معادلات پیوستگی و ممنتوم و حالت حل شود. تفاوت جریان‌های غیرقابل تراکم و قابل تراکم به اینجا محدود نمی‌شود و پدیده انتشار امواج الاستیک با سرعت نسبتاً محدود صوت در جریان قابل تراکم، خود عاملی دیگر در تأثیر بسزای فیزیک اکوستیک و تداخل امواج در چنین جریان‌هایی است. نکته دیگر اینکه در یک جریان قابل تراکم چون سرعت صوت (عامل انتشار امواج ناشی از شرط‌های مرزی) با سرعت جریان قابل مقایسه است، لذا در این جریان‌ها می‌توان سه دسته کلی را معرفی نمود:

$$1- \text{جریان مادون صوت } (M = \frac{V}{C} < 1)$$

$$2- \text{جریان گذر صوت } (M = \frac{V}{C} \approx 1)$$

$$3- \text{جریان مافوق صوت } (M = \frac{V}{C} > 1)$$

لازم به تذکر است در روابط فوق،  $C$  سرعت صوت،  $V$  سرعت سیال و  $M$  عدد ماخ می‌باشد. همچنین حدود اشاره شده فوق کاملاً تقریبی و کلی است و شکل جسم پرنده در جریان قابل تراکم می‌تواند حدود مادون صوت، گذر صوت و مافوق صوت بودن جریان آزاد را تغییر و تعیین نماید.



# فصل چهارم

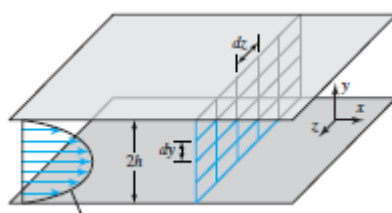
## جریان‌های داخل مجاری

#### ۱-۴ مقدمه

طبقه‌بندی جریان‌ها از نقطه نظر رشد لایه مرزی در فصل سوم مطالعه گردید. در این بخش، جریان‌های غیرقابل تراکم دو بعدی و پایا (پایدار زمانی) در شرایط کاملاً توسعه یافته مورد ارزیابی قرار گرفته و شناخت نیروی ثقل، گرادیان فشار و جمله‌ی  $\nabla^2 \bar{V}$  در معادلات ناویر-استوکس کامل‌تر خواهد شد. لازم به ذکر است که جریان‌های کاملاً توسعه یافته از دسته‌ی جریان‌های بدون جمله‌ی جابجایی محسوب می‌گردند و در بازه‌ی گسترده‌تری در سطوح بالاتر مورد مطالعه و ارزیابی قرار می‌گیرند.

#### ۲-۴ جریان بین دو صفحه‌ی تخت موازی ساکن

شکل (۱-۴) دو صفحه‌ی تخت موازی با طول به اندازه‌ی کافی زیاد برای وقوع شرایط جریان کاملاً توسعه یافته را نمایان می‌سازد. دو صفحه دارای عمق بی‌نهایت بوده و این بدین معناست که لبه‌های مرز بعد سوم آنقدر دورند که تأثیری روی جریان نگذاشته و می‌توان جریان را دو بعدی در نظر گرفت.



شکل ۱-۴ جریان بین دو صفحه تخت موازی.

با در نظر گرفتن معادلات پیوستگی و ممتم دو بعدی، غیرقابل تراکم و پایا (پایدار زمانی) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۱-۴)$$

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \quad (۲-۴)$$

$$\rho(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \quad (۳-۴)$$

در شرایط جریان کاملاً توسعه یافته با فرض طولی بودن صفحات و بررسی جریان پس از طول ورودی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4-4)$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۴-۱) می‌توان نتیجه گرفت:

$$0 + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4-5)$$

با توجه به اینکه روی هر دو صفحه شرایط عدم لغزش برقرار است، داریم:

$$u(0, x) = v(0, x) = u(h, x) = v(h, x) = 0 \quad (4-6)$$

بنابراین با انتگرال‌گیری از معادله‌ی (۴-۵) داریم:

$$v - v(0, x) = f(x) \quad (4-7)$$

این در حالیتیست که دلیلی مبنی بر تغییرات  $v$  بر حسب  $x$  وجود ندارد، یعنی نه مرزها در راستای  $x$  تغییر شرایط می‌دهند و نه  $u$  با  $x$  تغییر می‌کند، بنابراین همانطور که آزمایشات نیز این برآورد را تأیید نموده‌اند عملاً  $f(x) \approx 0$  و لذا:

$$v(y, x) \cong 0 \quad (4-8)$$

به این ترتیب معادلات (۴-۲) و (۴-۳) با توجه به فرض توسعه یافتگی به شکل زیر ساده می‌شوند:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4-9)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (4-10)$$

با توجه به ثابت ماندن فرم نیم رخ سرعت در راستای  $x$  ( $u$ ) می‌توان مجدداً نتیجه گرفت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4-11)$$

همچنین به دلیل آنکه نسبت  $h$  به طول صفحات آنقدر کوچک است که می‌توان جریان توسعه یافته را کامل شده دانست، بنابراین براساس مشاهدات تجربی تغییرات فشار در راستای  $y$  (حتی اگر این راستا کاملاً

در جهت شتاب ثقل باشد) بسیار ناچیزتر از تغییرات فشار در راستای  $x$  می باشد و به عبارتی در جریان کاملاً توسعه یافته:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} \quad (۴-۱۲)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{یا}$$

لذا از کل معادلات حرکت می توان به رابطه ی زیر رسید:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \rho g_x + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (۴-۱۳)$$

معادله ی (۴-۱۳) برای کلیه ی مسائل توسعه یافته در مختصات کارتزین صادق بوده و نه تنها مسئله بین دو صفحه ی تخت بلکه هر مسئله توسعه یافته ی دیگر مشابه نیز با استدلال اخیر به معادله (۴-۱۳) منجر می گردد.

در برخی کتب مرجع، برای کوچک دانستن تغییرات فشار در راستای  $y$  و همچنین بستگی  $p$  فقط به  $x$  از روش زیر استفاده شده است و گرادیان فشار را عددی ثابت محاسبه می نمایند:

$$\frac{\partial}{\partial x} (0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y) \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = 0 \quad (۴-۱۴)$$

با انتگرال گیری مجدد در راستای  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial p}{\partial x}) = 0 \xrightarrow{\int} \frac{\partial p}{\partial x} = const \quad (۴-۱۵)$$

یا به عبارتی در هر نقطه از راستای  $y$  می توان تغییرات فشار را صفر در نظر گرفت و همچنین به نتیجه ثابت ماندن  $\frac{\partial p}{\partial x}$  رسید.

ثابت ماندن  $\frac{dp}{dx}$  در معادله‌ی (۴-۱۳) نیز کاملاً هویدا است. زیرا ثابت بودن  $\rho g_x$  و تابعیت  $u = u(y)$  و

$p = p(x)$  در یک معادله تنها در شرایطی میسر است که  $\frac{dp}{dx}$  نیز مقدار ثابتی در کنار  $\mu \frac{d^2 u}{dy^2}$  باشد.

بنابراین می‌توان معادله‌ی (۴-۱۳) را برای مسئله‌ی موردنظر به شکل زیر حل کرد.

$$\left(\frac{dp}{dx} - \rho g_x\right) = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (۴-۱۶)$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی (۴-۱۶) داریم:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} - \rho g_x\right) y^2 + c_1 y + c_2 \quad (۴-۱۷)$$

با استفاده از دو شرط مرزی عدم لغزش داریم:

$$\begin{cases} y = 0 ; u = 0 \\ y = h ; u = 0 \end{cases} \quad (۴-۱۸)$$

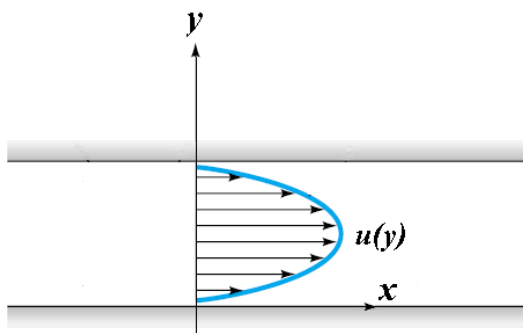
$$c_2 = 0 , \quad c_1 = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} - \rho g_x\right) h \quad (۴-۱۹)$$

بنابراین معادله‌ی نیم رخ سرعت عبارت است از:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} - \rho g_x\right) (y^2 - hy) \quad (۴-۲۰)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود معادله‌ی فوق معادله‌ی یک سهمی است که ماکزیمم آن در  $y = \frac{h}{2}$  قرار دارد.

نمایی از نیم رخ سرعت در جریان توسعه یافته بین دو صفحه‌ی تخت در شکل (۴-۲) نشان داده شده است.



شکل ۴-۲ نیم رخ سرعت در جریان توسعه یافته بین دو صفحه‌ی تخت.

همانطور که ملاحظه می‌گردد در صورتی که عوامل گرادیان فشار و  $g_x$  صفر باشند، مقدار سرعت نیز صفر می‌گردد و به همین ترتیب اگر جهت این عوامل عکس گردد، می‌توان سرعتی در سمت مخالف تصور نمود. همچنین در صورتی که  $g_x$  در جهت خلاف محور  $x$  ها در مخالفت  $\frac{dp}{dx}$  (که جریان را به سمت مثبت محور  $x$  ها می‌راند) اعمال نیرو نماید، طبیعی است که بسته به مقدار  $g_x$ ، می‌توان ماکزیمم سهمی را کوچک‌تر دانست و در صورت غلبه‌ی کامل  $g_x$  بر اثر  $\frac{dp}{dx}$ ، جریان را معکوس برشمرد و  $\frac{dp}{dx}$  را به عنوان مانع حرکت به سمت منفی محور  $x$  ها در نظر گرفت. لذا می‌توان  $\frac{dp}{dx}$  و  $\rho g_x$  را به عنوان چشمه یا چاه ممنتم در معادله‌ی حرکت تلقی نمود. به عبارتی، این جملات هم می‌توانند عامل حرکت باشند و هم می‌توانند نقش بازدارندگی در برابر عوامل دیگر را داشته باشند.

از معادله‌ی (۴-۲۰) بر حسب  $y$  مشتق گرفته و نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g_x \right) (2y - h) \quad (۴-۲۱)$$

بنابراین معادله‌ی «چرخش» به شکل زیر است:

$$\zeta = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2\mu} \left( \rho g_x - \frac{dp}{dx} \right) (2y - h) \quad (۴-۲۲)$$

لذا مقدار چرخش علاوه بر وابستگی به  $y$ ، کاملاً به مقدار عوامل حرکت  $\frac{dp}{dx}$ ،  $\rho g_x$  و همچنین لزجت

بستگی دارد. مقدار  $\zeta$  روی سطوح عبارت است از:

$$|\zeta(0)| = |\zeta(h)| = \frac{1}{2\mu} \left( \rho g_x - \frac{dp}{dx} \right) h \quad (۴-۲۳)$$

از مقدار چرخش روی جداره‌ها می‌توان دریافت هر چه عامل حرکت یعنی  $k = \left| \rho g_x - \frac{dp}{dx} \right|$  سرعت شدیدتر

و قوی‌تری به وجود آورد، شدت چرخش روی سطح نیز افزایش می‌یابد. همچنین باید توجه کرد که یک

جریان توسعه یافته که فاقد جملات جابجایی است، در واقع یک جریان با شتاب صفر است و چرخش و

تغییرات آن به عوامل حرکت و نه شتاب جریان وابستگی دارد.

به همین ترتیب می‌توان مقدار تنش برشی را نیز محاسبه نمود:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{dp}{dx} - \rho g_x \right) (2y - h) \quad (24-4)$$

برای محاسبه‌ی دبی جریان و سرعت متوسط با فرض  $k = \frac{dp}{dx} - \rho g_x$  داریم:

$$Q = \int_0^h u(y) dy \times 1 = \int_0^h \frac{k}{2\mu} (y^2 - yh) dy = \frac{k}{2\mu} \left( \frac{y^3}{3} - \frac{y^2 h}{2} \right)_0^h = \frac{-kh^3}{12\mu} \quad (25-4)$$

که محاسبات در واحد عمق صفحات صورت پذیرفته است. بنابراین سرعت متوسط عبارت است از:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{h \times 1} = \frac{-kh^2}{12\mu} \quad (26-4)$$

به همین ترتیب ضریب اصطکاک روی یکی از صفحات عبارت است از:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho \bar{V}^2} \quad (27-4)$$

و همچنین:

$$|\tau_w| = \tau|_{y=0} = \frac{-k}{2} h \quad (28-4)$$

در نتیجه:

$$C_f = \frac{-\frac{k}{2} h}{\frac{1}{2} \rho \left( \frac{kh^2}{12\mu} \right)^2} = \frac{-144\mu^2}{\rho kh^3} \quad (29-4)$$

همچنین می‌توان این عبارت را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$C_f = \frac{-kh}{\rho \bar{V} \bar{V}} = \frac{-kh}{\rho \bar{V} \cdot \frac{(-kh^2)}{12\mu}} = \frac{12}{\text{Re}_h} \quad (30-4)$$

که در آن  $\text{Re}_h = \frac{\rho \bar{V} h}{\mu}$ ، بنابراین:

$$C_f \cdot \text{Re}_h = 12 \quad (31-4)$$

حاصل ضرب سمت چپ عبارت (۴-۳۱) به عدد پوزویل معروف است:

$$Po = C_f \cdot Re_h = 12 \quad (۴-۳۲)$$

یعنی در این مسئله حاصلضرب ضریب اصطکاک  $C_f$  و عدد رینولدز  $Re_h$  مقداری ثابت است.

**مثال ۴-۱** در جریان آب  $20^\circ C$  توسعه یافته بین دو صفحه‌ی تخت موازی و افقی در صورتی که طول صفحات  $4\text{ km}$  بوده و اختلاف فشار طرفین آن  $500\text{ kPa}$  باشد، مقدار دبی جریان را محاسبه نمائید. (فاصله دو صفحه  $5\text{ cm}$  می‌باشد).

**حل:**

$$\mu = 1 \times 10^{-3} \frac{N \cdot s}{m^2} \quad \text{مقدار } \mu \text{ برای آب } 20^\circ C \text{ برابر است با:}$$

و همچنین گرادیان فشار برابر است با:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-\Delta p}{L} = \frac{-5 \times 10^5}{4 \times 10^3} = -125 \frac{Pa}{m}$$

علامت منفی به خاطر آن است که فشار در جهت جریان کم می‌شود.

بنابراین طبق رابطه‌ی (۴-۲۵):

$$Q = \frac{-kh^3}{12\mu} = -\frac{(-125) \times (0.05)^3}{12 \times 1 \times 10^{-3}} = 1.30 \frac{m^3}{\text{sec}}$$

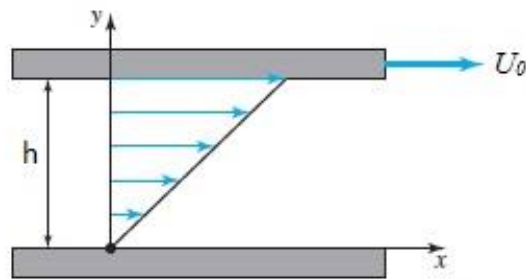
#### ۴-۳ جریان بین دو صفحه‌ی تخت موازی با صفحات متحرک (جریان کوئت)<sup>۱</sup>

در این بخش همانند بخش ۴-۱، جریان توسعه یافته، غیرقابل تراکم و دو بعدی بین دو صفحه‌ی نامتناهی با طول و عرض زیاد در فاصله  $h$  از یکدیگر قرار دارند، تفاوت این مسئله با مسئله‌ی بخش ۴-۱ در آن است که  $\frac{dp}{dx} = g_x = 0$  و تنها عامل حرکت، سرعت یکی از صفحات است. به همین منظور شکل ۴-۳ را در نظر

بگیرید. با استفاده از معادله‌ی (۴-۱۳) و با در نظر گرفتن فرض  $\frac{dp}{dx} = g_x = 0$  داریم:



$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad (33-4)$$



شکل ۳-۴ شماتیک جریان کوئت.

با دو بار انتگرال گیری از معادله ی (۴-۲۸) داریم:

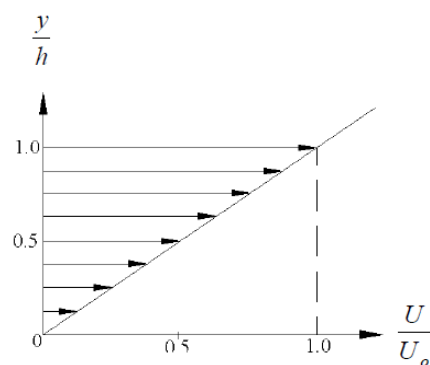
$$u(y) = c_1 y + c_2 \quad (34-4)$$

شرایط مرزی روی صفحات عبارتند از:

$$u(0) = 0, \quad u(h) = U_0 \quad (35-4)$$

با ترکیب روابط (۴-۲۹) و (۴-۳۰) مقدار ثوابت  $c_1$  و  $c_2$  محاسبه شده و داریم:

$$u(y) = U_0 \frac{y}{h} \quad (36-4)$$



شکل ۴-۴ نیم رخ سرعت در جریان کوئت.

نیم رخ سرعت در جریان کوئت در شکل (۴-۴) نشان داده شده است. برای محاسبه ی چرخش و تنش برشی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_0}{h} \quad (37-4)$$

و لذا:

$$\zeta = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{U_0}{h} \quad (38-4)$$

و همچنین:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{U_0}{h} \quad (39-4)$$

و مقدار آن در تمام مقطع جریان ثابت است.

مقدار دبی جریان نیز عبارت است از:

$$Q = \int_0^h u(y) dy \times 1 = \frac{U_0}{2} h \quad (40-4)$$

لذا:

$$\bar{V} = \frac{Q}{h \times 1} = \frac{U_0}{2} \quad (41-4)$$

بنابراین مقدار ضریب اصطکاک  $C_f$  با فرض  $Re_h = \frac{\rho \bar{V} h}{\mu}$  عبارت است از:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho \bar{V}^2} = \frac{\mu \frac{U_0}{h}}{\frac{1}{2} \rho \bar{V} \frac{U_0}{2}} = \frac{4}{\rho \bar{V} \frac{h}{\mu}} \quad (42-4)$$

و در نتیجه:

$$Po = C_f \cdot Re_h = 4 \quad (43-4)$$

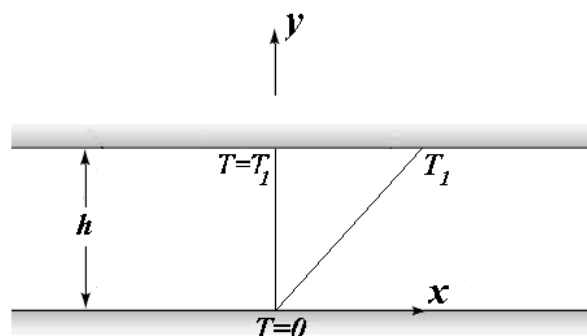
در نتیجه عدد پوزویل جریان کوئت کمتر از مسئله‌ی بخش ۴-۱ است.

از حل این مسئله نتیجه‌ی بسیار مهمی حاصل می‌شود. اگر به معادله‌ی (۴-۳۳) دقت شود، ملاحظه

می‌گردد که تنها جمله‌ی باقی مانده از معادله‌ی حرکت بخشی از جمله‌ی نفوذ یعنی  $\nabla^2 \vec{V}$  است.

بدین ترتیب می‌توان دریافت در مسئله‌ی کوئت تنها یک مکانیزم که نماد ریاضی آن جمله‌ی  $\nabla^2 V$  می‌باشد حاکم است. از سوی دیگر با توجه به صورت مسئله تنها یکی از صفحات به حرکت درآمده و این درحالی است که لایه‌های زیرین آن، یعنی سیال بین دو صفحه، حاوی چشمه‌ی حرکت نبوده ولی به حرکت درآمده است. لذا می‌توان نتیجه گرفت که اثر دو مرز جریان یعنی مرز ثابت و متحرک با مکانیزم  $\nabla^2 V$  به داخل جریان نفوذ کرده و همانند انتقال گرمای هدایتی در یک دیوار با اختلاف دما که باعث توزیع دما می‌گردد، در اینجا اختلاف سرعت باعث حرکت گردیده است. به همین دلیل می‌توان دریافت که جمله‌ی  $\nabla^2 V$  در واقع نفوذ شرایط ممنتمی مرزها به داخل جریان است و این اهمیت مسئله‌ی کوئت را آشکارتر می‌سازد. برای درک بهتر تشابه بین مسئله‌ی کوئت و مسئله‌ی گرما به مسئله‌ی هدایت بین دو صفحه اشاره می‌شود. در مسئله‌ی هدایت در یک دیوار به ضخامت  $h$  معادله‌ی حاکم بر هدایت دائمی به شرح زیر است:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (4-44)$$



شکل ۴-۵ هدایت دائمی در یک دیواره.

ملاحظه می‌گردد که با انتگرال‌گیری و اعمال شرایط مرزی:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{y}{h} \quad (4-45)$$

تفاوت دو مسئله تنها در آن است که اختلاف دما باعث نفوذ گرما شده ولی در مسئله‌ی کوئت تفاوت سرعت دو صفحه باعث نفوذ ممنتم گردیده است. تفاوت نسبت نفوذ دما و ممنتم را می‌توان در مسئله‌ی هدایت و کوئت ناپایا دریافت.

معادلات مکانیزم نفوذ پایای حرارت در دیواره‌ی مسطح و نفوذ در جریان کوئت به شرح زیر است:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4-46)$$

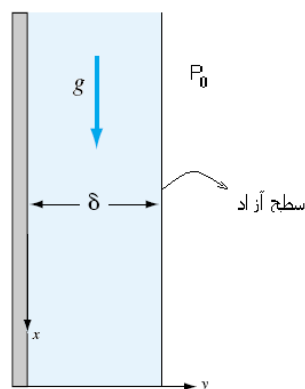
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4-47)$$

از معادلات (4-46) و (4-47) می‌توان دریافت که ممتم با ضریب  $\nu$  و گرما با ضریب  $\alpha$  نفوذ می‌نمایند. از این جهت پارامتر  $\nu$  از اهمیت ویژه‌ای در مبحث جریان لزج برخوردار بوده و در واقع این  $\nu$  است که تعیین کننده نفوذ چرخش به داخل میدان جریان و تشکیل لایه مرزی است. لذا  $\mu$  نمی‌تواند تفاوت لازم بین دو جریان از دو سیال مختلف را از حیث نفوذ شرایط مرزی هویدا سازد.

#### ۴-۴ جریان توسعه یافته با سطح آزاد

برای آنکه شرایط مرزی سطح آزاد تجربه شود، مسئله‌ی شارش روی یک دیواره‌ی عمودی را در نظر بگیرید که ضخامت جریان ( $\delta$ ) ثابت مانده و شرایط توسعه یافتگی برای این مسئله مفروض است. با توجه به اینکه در همه جای جریان فشار اتمسفر  $p_0$  برقرار است، لذا تغییرات فشار در راستای  $x$ ،  $\left(\frac{dp}{dx}\right)$  ناچیز است، به همین دلیل از معادله‌ی حرکت داریم:

$$0 = \rho g + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (4-48)$$



شکل ۴-۶ شماتیک مسئله‌ی شارش روی دیوار.

شرایط مرزی این مسئله عبارت است از:

$$u(0) = 0 \quad \text{عدم لغزش} \quad (4-49\text{-الف})$$

$$\tau(\delta) = 0 \quad \text{سطح آزاد} \quad (4-49\text{-ب})$$

با انتگرال گیری و اعمال دو شرط مرزی فوق:

$$u(y) = \frac{-\rho g}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2$$

$$u(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$\frac{du}{dy}(\delta) = 0 \rightarrow \frac{-\rho g}{\mu} \delta + c_1 = 0 \rightarrow c_1 = +\frac{\rho g}{\mu} \delta$$

و در نتیجه:

$$u(y) = \frac{\rho g}{2\mu} (-y^2 + 2\delta y) \quad (4-50)$$

به ترتیبی که قبلاً عنوان شد:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\rho g}{2\mu} (-2y + 2\delta) = \rho g(-y + \delta) = \rho g(\delta - y) \quad (4-51)$$

و روی سطح دیوار:

$$\tau_w = +\rho g \delta \quad (4-52)$$

به همین ترتیب:

$$Q = \int_0^\delta u dy \times 1 = \frac{\rho g}{2\mu} \left[ \frac{-\delta^3}{3} + \delta^3 \right] = \frac{\rho g \delta^3}{3\mu} \quad (4-53)$$

لذا:

$$\bar{V} = \frac{Q}{\delta \times 1} = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu} \quad (4-54)$$

بنابراین:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho \bar{V} \bar{V}} = \frac{\rho g \delta}{\frac{1}{2} \rho \bar{V} \frac{\rho g \delta^2}{3\mu}} = \frac{6}{\rho \bar{V}} \frac{\delta}{\mu} = \frac{6}{\text{Re}_\delta} \quad (4-55)$$

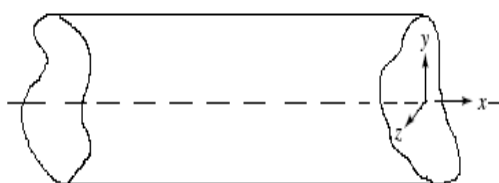
لذا داریم:

$$Po = C_f \cdot Re_\delta = 6 \quad (56-4)$$

به این ترتیب عدد پوزویل این جریان از مقدار مشابه جریان کوئت بیشتر است.

#### ۵-۴ جریان توسعه یافته در داخل کانال‌ها

همانطور که از عنوان این بخش پیداست، جریان غیرقابل تراکم سه‌بعدی در داخل یک کانال با مقطع محدود موردنظر است. اگر در کانالی که در شکل (۷-۴) نمایش داده شده است، مقطع دلخواه در سیستم



شکل ۷-۴ جریان توسعه یافته در کانال با مقطع دلخواه.

مختصات کارتزین در نظر گرفته شود و شرط عدم لغزش نیز در تمام این مقطع یعنی منحنی  $\Gamma$  برقرار باشد (که همواره در شرایط عمومی برقرار است). معادلات جریان پایا و توسعه یافته در شرایط سه‌بعدی شبیه به حالت دو بعدی ساده می‌شوند با این تفاوت که در معادله‌ی ممتم در راستای  $x$ ، دو جمله‌ی مشتق مرتبه‌ی دوم دیده می‌شود، لذا اولاً:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} \approx 0 \quad (57-4)$$

و همینطور معادله‌ی ممتم در راستای  $x$ :

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (58-4)$$

اگر در رابطه‌ی فوق فرض شود،  $k = (-\rho g_x + \frac{dp}{dx})$  خواهیم داشت:

$$0 = -k + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (59-4)$$

باتغییر متغیر زیر داریم:

$$u^*(y, z) = \frac{u(y, z)}{\frac{k}{\mu}} \quad (۴-۶۰)$$

با اعمال این تغییر متغیر در رابطه‌ی (۴-۵۹) داریم:

$$\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}\right) \frac{k}{\mu} \times \mu + k \quad \text{یا} \quad \nabla^2 u^* = -I, \quad u^*_r = 0 \quad (۴-۶۱)$$

رابطه‌ی (۴-۶۱) به مسئله‌ی دیریکله موسوم است و مقدار  $u^*$  روی مرز  $\Gamma$  صفر است.

جواب مسئله‌ی دیریکله به روی  $\Gamma$  با هندسه‌های مختلف در مرجع [4] آمده است و در اینجا از تکرار آن پرهیز می‌شود، اما جریان درون لوله یعنی کانال با مقطع دایره مورد بررسی قرار می‌گیرد.

#### ۴-۶ جریان داخل لوله

با توجه به اینکه برای جریان داخل لوله مناسب‌ترین مختصات، سیستم مختصات استوانه‌ای است، در سیستم مختصات استوانه‌ای تعریف لاپلاسین و رابطه‌ی (۴-۶۱) منجر به معادله‌ی زیر برای لوله‌ها می‌شود.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) \quad (۴-۶۲)$$

با انتگرال‌گیری داریم:

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} r + \frac{c_1}{r} \quad (۴-۶۳)$$

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad \text{و در نتیجه:}$$

به این ترتیب تنها اعمال شرایط مرزی باقی می‌ماند، یعنی:

$$u(r=0) = \text{محدود} \quad \text{یا} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (۴-۶۴)$$

$$u(r=R) = 0$$

با شرایط فوق خواهیم داشت:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2 \quad (۴-۶۵)$$

لذا با اعمال  $C_1$  و  $C_2$  معادله‌ی سرعت به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2) \quad (۴-۶۶)$$

در نتیجه:

$$\tau_w = -\mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\mu \left( \frac{1}{4\mu} \right) \frac{dp}{dx} (2R) = -\frac{R}{2} \frac{dp}{dx} \quad (۴-۶۷)$$

از طرفی:

$$Q = \int_0^R 2\pi r u(r) dr = \frac{2\pi}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[ \frac{r^4}{4} - \frac{R^2 r^2}{2} \right]_0^R = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (۴-۶۸)$$

و

$$\bar{V} = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8} \frac{dp}{dx} \quad (۴-۶۹)$$

لذا داریم:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho \bar{V} \bar{V}} = \frac{-\frac{R}{2} \frac{dp}{dx}}{\frac{1}{2} \rho \bar{V} \left( -\frac{R^2}{8} \frac{dp}{dx} \right)} = \frac{8}{\rho \bar{V} \frac{R}{\mu}} = \frac{8}{\text{Re}_d} \quad (۴-۷۰)$$

بنابراین:

$$Po = C_f \cdot \text{Re}_d = 8 \quad (۴-۷۱)$$

توجه شود که اینجا صرفاً برای سهولت عبارت  $\rho g_x$  نوشته نشده و دلیل دیگری وجود ندارد و می‌توان

نیمرخ سرعت سهمی رابطه‌ی (۴-۶۶) را همراه با اثر  $\rho g_x$  نیز به دست آورد.

مقدار سرعت ماکزیمم در جریان اجباری داخل لوله توسط گرادیان فشار از طریق زیر محاسبه می‌شود و

می‌توان به راحتی دید که این مقدار همان  $u(r=0)$  است.

$$u_{\max} = u(r=0) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} [0 - R^2] = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \quad (۴-۷۲)$$

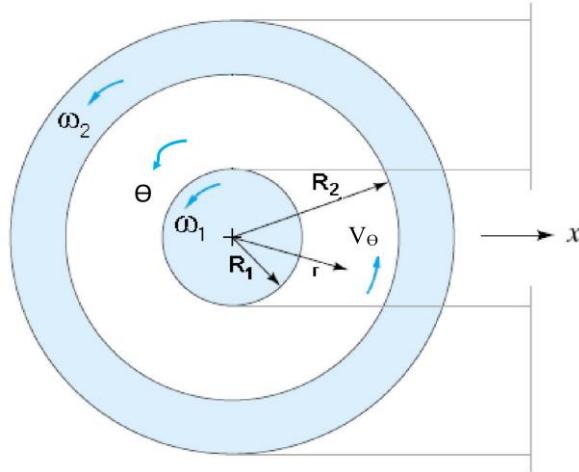
بنابراین:

$$\frac{u(r)}{u_{\max}} = \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (۴-۷۳)$$



#### ۷-۴ جریان توسعه یافته‌ی داخل دو سیلندر دوار

اگر به شکل (۸-۴) دقت شود دو سیلندر به شعاع  $R_1$  و  $R_2$  با سرعت‌های زاویه‌ای  $\omega_1$  و  $\omega_2$  به صورت هم مرکز در حال دوراند و سیال بین این دو بر اثر چرخش سیلندرها در حال حرکت در جهت  $\theta$  است.



شکل ۸-۴ سیلندره‌ای دوار هم محور.

ابتدا به بازنویسی معادلات پیوستگی و ناویر-استوکس غیرقابل تراکم در مختصات استوانه‌ای پرداخته می‌شود:

معادله‌ی پیوستگی:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (۷۴-۴)$$

معادله‌ی ممتم در راستای  $r$ :

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right\} \quad (۷۵-۴)$$

معادله‌ی ممتم در راستای  $\theta$ :

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{v_\theta v_r}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right\} \quad (۷۶-۴)$$

و همچنین در راستای  $x$  (راستای طولی):

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right\} \quad (۷۷-۴)$$

با توجه به اینکه جریان دارای شرایط زیر است، یعنی:

$$v_r = v_x = 0, \quad v_\theta = v_\theta(r), \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad (۷۸-۴)$$

و همچنین جریان دارای تقارن محوری است یعنی تغییرات کلیه‌ی پارامترها نسبت به  $\theta$  صفر است، زیرا استوانه‌ها نسبت به محور دارای تقارن هندسی و فیزیکی هستند. لذا معادلات (۷۴-۴) تا (۷۷-۴) به شرح زیر ساده می‌شود:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (۷۹-۴)$$

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r \quad (۸۰-۴)$$

$$0 = 0 + \rho g_\theta + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right] \quad (۸۱-۴)$$

از آنجاییکه  $g_\theta = 0$  و همچنین مطابق آنچه قبلاً گفته شد تغییرات هیدرواستاتیکی فشار در غیر راستای حرکت ناچیز است، لذا:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v_\theta^2}{r} \quad (۸۲-۴)$$

و

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right] \quad (۸۳-۴)$$

تنها معادلات باقی مانده خواهد بود. رابطه‌ی (۴-۸۲) در واقع اثر نیروی جانب مرکز است که باعث تغییرات

فشار در راستای  $r$  می‌گردد. بنابراین از معادله‌ی (۴-۸۳) داریم:

$$\frac{d}{dr}(rv_{\theta}) = c_1 r \rightarrow v_{\theta} = \frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r} \quad \text{یا} \quad v_{\theta} = c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (۴-۸۴)$$

با اعمال شرایط مرزی:

$$R_1 \omega_1 = c_1 R_1 + \frac{c_2}{R_1} \quad (۴-۸۵)$$

$$R_2 \omega_2 = c_1 R_2 + \frac{c_2}{R_2}$$

لذا:

$$c_2 = R_1^2 \omega_1 - c_1 R_1^2$$

$$R_2 \omega_2 = c_1 R_2 + \frac{R_1^2}{R_2} \omega_1 - c_1 \frac{R_1^2}{R_2} \Rightarrow$$

$$R_2 \omega_2 = c_1 \left( \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2} \right) + \frac{R_1^2}{R_2} \omega_1 \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{R_2^2 \omega_2 - R_1^2 \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \quad (۴-۸۶)$$

و در نتیجه:

$$c_2 = R_1^2 \omega_1 - R_1^2 \frac{R_2^2 \omega_2 - R_1^2 \omega_1}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$c_1 = \frac{R_2^2 \omega_2 - R_1^2 \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \quad (۴-۸۷)$$

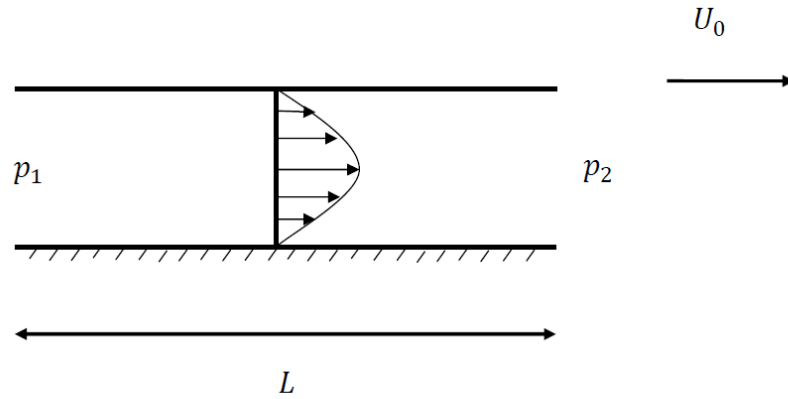
بنابراین:

$$v_{\theta} = \frac{R_2^2 \omega_2 - R_1^2 \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \quad (۴-۸۸)$$

با محاسبه‌ی  $v_{\theta}$  می‌توان تغییرات فشار در راستای  $r$  را محاسبه کرد.

## مسائل فصل چهارم

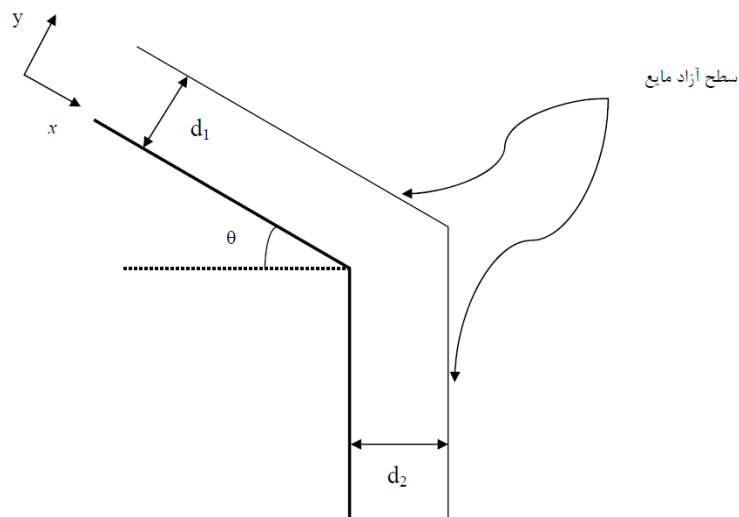
۴-۱ یک جریان لزج توسعه یافته بین دو صفحه تخت که صفحه بالایی با سرعت  $U_0$  به سمت جریان در حرکت است را در نظر بگیرید. برای غلبه بر اختلاف فشار در واحد طول  $\frac{p_1 - p_2}{L}$ ، توان لازم برای حرکت صفحه بالایی را محاسبه نمایید؟



۴-۲ در شکل زیر جریان یکنواخت یک لایه نازک از مایع بر روی سطح شیبدار به طرف پایین برقرار است. مقدار  $\theta$  را طوری تعیین کنید که  $d_1 = 3d_2$  باشد؟

$d_1$ : ضخامت مایع بر روی سطح شیبدار

$d_2$ : ضخامت مایع بر روی سطح عمودی



۳-۴ مطابق شکل زیر قطعه بالایی با سرعت  $u_0$  در راستای  $x$  حرکت می‌کند. با صرفنظر کردن از نیروهای

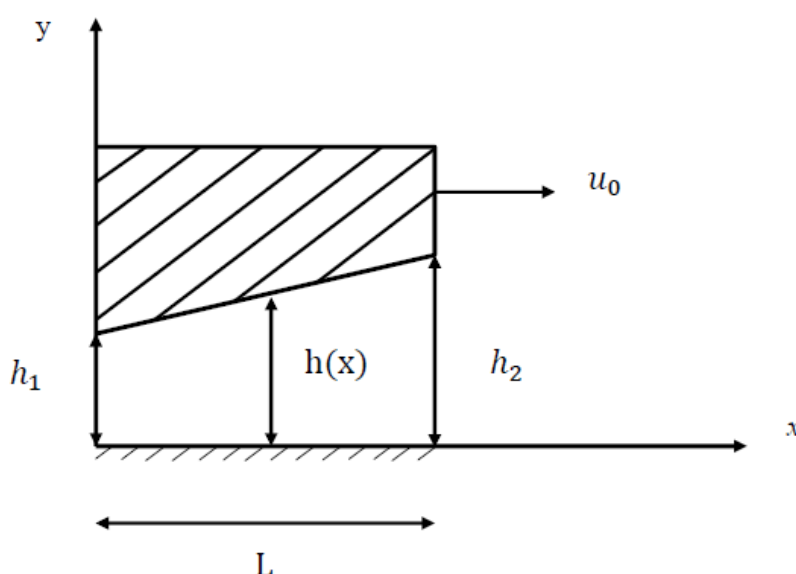
اینرسی در مقابل نیروهای لزجی موارد زیر را بر حسب مقادیر معلوم  $u_0, h_2, h_1, p_0$  و  $L$  تعیین نمایید؟

(الف) پروفیل سرعت بین قطعه متحرک و سطح ثابت؟

(ب) دبی عبوری از فضای بین قطعه متحرک و سطح ثابت؟

(ج) پروفیل فشار؟

$$x=0, y=h_1, p=p_0 \quad ; \quad x=L, y=h_2, p=p_0$$



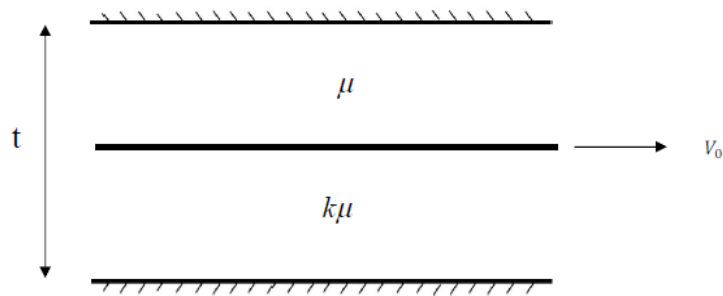
۴-۴ یک ورق نازک و با مساحت زیاد بین دو سطح ثابت که به فاصله  $t$  از هم قرار دارند، طبق شکل حرکت

داده می‌شود. اگر در یک طرف صفحه متحرک، روغن با لزجت  $\mu$  و در طرف دیگر روغن با لزجت

$k\mu$  (عدد ثابت) وجود داشته باشد، صفحه متحرک باید در چه فاصله‌ای از سطح پایین قرار گیرد تا

نیروی لازم جهت کشیدن آن با سرعت ثابت  $V_0$  حداقل باشد؟ (جریان توسعه یافته بوده و گرادیان فشار

$(\frac{dp}{dx})$  صفر است)

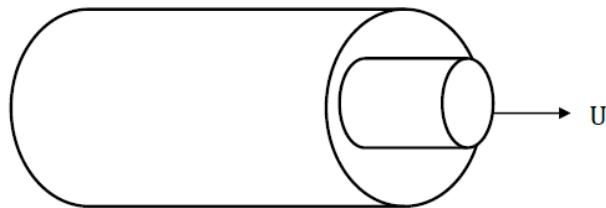


۴-۵ بین دو استوانه هم مرکز از سیالی با لزجت  $\mu$  و چگالی  $\rho$  پر شده است. اگر استوانه داخلی با سرعت  $U$  به سمت راست کشیده شود و با فرض اینکه گرادیان فشار در راستای حرکت ناچیز باشد، تعیین نمایید:

الف) پروفیل سرعت بین دو استوانه؟

ب) تنش برشی روی استوانه داخلی؟

ج) توان مصرفی حرکت استوانه داخلی؟



# فصل پنجم

## جریان‌های لزج خارجی

## ۱-۵ تقریب لایه مرزی

در جریان‌های لزج خارجی که در فصل سوم تشریح گردید به جریان‌های غیرقابل تراکم از این مجموعه جریان‌ها بسنده نموده و تقریب لایه مرزی را در جریان‌هایی با عدد رینولدز به اندازه کافی بالا تشریح می‌نماییم. در این بخش به خانواده‌ی وسیعی از جریان‌های لزج خارجی که ضخامت لایه مرزی آنها در مقایسه با طول جسم کوچک است پرداخته می‌شود، یعنی:

$$\frac{\delta}{L} \ll 1 \quad (۱-۵)$$

( $\delta$  ضخامت لایه مرزی و  $L$  طول جسم است.)

به همین منظور معادلات جریان پایای غیرقابل تراکم دو بعدی را مجدداً یادآور می‌شویم:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (۲-۵)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x \quad (۳-۵)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y \quad (۴-۵)$$

در جریان‌های با رینولدز بالا برای ارضاء شرط (۱-۵) (قبلاً در بخش سوم گفته شد که بالا رفتن عدد رینولدز باعث نازک شدن لایه مرزی می‌شود) براساس مشاهدات، نیروهای بدنی تأثیر قابل توجهی روی مقدار حرکت نمی‌گذارند. بنابراین می‌توان  $g_x$  و  $g_y$  را از معادلات (۳-۵) و (۴-۵) حذف کرد.

برای درک تقریب لایه مرزی نازک باید از روش مقایسه‌ی مرتبه‌ها کمک گرفت. این روش به صورت اجمالی و با حداقل توضیحات در این فصل مطرح می‌شود.

### ۱-۱-۵ ساده کردن معادلات حرکت به کمک روش مقایسه‌ی مرتبه‌ها

در روش مقایسه‌ی مرتبه‌ها برای پارامترهای اصلی مسئله، مقیاس مناسبی را در نظر گرفته و براساس این مقیاس، جملات مختلف معادلات را با یکدیگر مقایسه نموده و در صورتیکه مراتب برخی جملات کوچکتر از حد مطلوب باشند از معادلات حذف می‌شوند. در مسئله جریان‌های با رینولدز بالا یا همان لایه مرزی نازک، شرط (۱-۵) معیار قضاوت مرتبه‌ها قرار می‌گیرد.



به همین منظور مرتبه‌های زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$O(u) = U_{\infty} \quad (5-5-الف)$$

$$O(x) = L \quad (5-5-ب)$$

$$O(y) = \delta \quad (5-5-پ)$$

منظور از  $O$  همان مرتبه (*order*) است. براساس مراتب فوق می‌توان از معادله‌ی (5-۲) استفاده کرد و مرتبه‌ی  $v$  را تعیین نمود.

$$O(v) = O(y) \frac{O(u)}{O(x)} = \frac{\delta}{L} U_{\infty} \quad (5-۶)$$

یا به عبارت دیگر می‌توان نتیجه گرفت:

$$O\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{\delta}{L} \ll 1 \quad (5-۷)$$

با نتیجه‌ی فوق می‌توان استنتاج کرد که تمام جملات متناظر معادله‌ی ممنتیم در راستای  $y$  نسبت به ممنتیم در راستای  $x$  از همین نسبت برخوردار است. مثلاً:

$$O\left(\frac{v \frac{\partial u}{\partial x}}{u \frac{\partial u}{\partial x}}\right) = O\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{\delta}{L} \ll 1$$

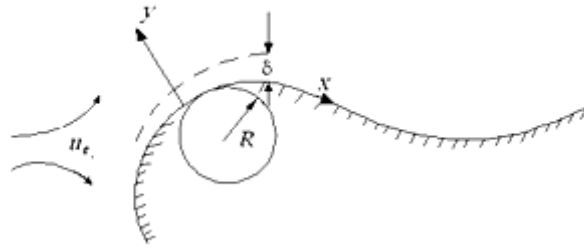
بنابراین کل معادله‌ی ممنتیم در راستای  $y$  در مقایسه با معادله‌ی ممنتیم در راستای  $x$  دارای این نسبت مقیاس است. از آنجاییکه هدف مطالعه‌ی جریان‌هایی است که نسبت  $\frac{\delta}{L}$  به قدر لازم کوچک است، لذا کل معادله ممنتیم در راستای  $y$  در مقایسه معادله‌ی ممنتیم در راستای  $x$  قابل اغماض است.

شاید در اینجا این سؤال مطرح گردد که  $\frac{\partial p}{\partial y}$  چه می‌شود؟ پاسخ مشابه آنچه است که در جریان کاملاً

توسعه یافته مشاهده شد. بلکه تمام مشاهدات حاکی از آن است که تغییرات فشار در صورتی که انحنای سطح بزرگ باشد و بتوان رابطه زیر را مفروض دانست، آنگاه این جمله کوچک و نزدیک به صفر است.

$$\frac{\delta}{R} \ll 1$$

در اینجا  $R$  انحناى سطح و  $\delta$  ضخامت لایه مرزى است (شکل ۵-۱).



شکل (۵-۱) نمایش جریان لایه مرزى روی جسم با انحنا.

بنابراین می‌توان کل معادله‌ی ممتم را با آسودگی خاطر حذف نمود. از سوی دیگر یکی از جملات معادله‌ی ممتم در راستای  $x$  نیز قابل اغماض است. یعنی جمله‌ی نفوذ در راستای  $x$  نسبت به نفوذ در راستای  $y$  کوچک است.

$$O \left( \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \right) = \frac{\frac{U_\infty}{L^2}}{\frac{U_\infty}{\delta^2}} = \left( \frac{\delta}{L} \right)^2 \ll 1 \quad (۸-۵)$$

این امر دقیقاً به خاطر قابل توجه بودن مکانیزم جابجایی در راستای  $x$  است که دیگر انتقال حرکت از طریق نفوذ در راستای  $x$  قابل توجه نخواهد بود. بنابراین معادلات حرکت به فرم زیر به ساده‌ترین حالت خود قابل بازنویسی است:

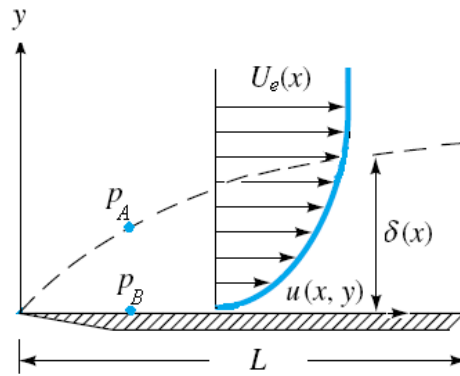
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۹-۵)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (۱۰-۵)$$

نکته‌ی باقیمانده از تقریب لایه مرزى، استفاده از معادله‌ی برنولى است. همانطور که در فصل ۳ اشاره شد در یک میدان غیرچرخشی می‌توان بین هر دو نقطه از جریان از معادله‌ی برنولى استفاده کرد. از آنجاییکه براساس تعریف لایه مرزى، بیرون از لایه مرزى عملاً جریان با تقریب بسیار خوب غیرچرخشی است، لذا می‌توان بین نقاط بیرون لایه مرزى در امتداد  $x$  یا هر امتداد دیگری از معادله‌ی برنولى استفاده کرد. همچنین از طرفی نیروی بدنی نیز در جریان‌های با لایه مرزى نازک قابل اغماض بوده و معادله‌ی برنولى

تنها به جملات فشار و انرژی جنبشی محدود می‌شود. توجه به این مطلب که  $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$ ، این نوید را می‌دهد که می‌توان فشار را در بیرون لایه مرزی محاسبه نمود و سپس آن را در داخل معادله‌ی (۵-۱۰) اعمال نمود. به این ترتیب با استفاده از معادله‌ی برنولی و با توجه به شکل (۵-۲) داریم:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u_e \frac{du_e}{dx} \quad (۵-۱۱)$$



شکل ۵-۲ نمایشی از لایه مرزی نازک و نمای سرعت .

سرعت  $u_e$  تنها تابع  $x$  بوده و به سرعت غیر لزج یا غیرچرخشی موسوم است و تنها تابع انحنای سطح در راستای  $x$  است. اما سرعت  $u(y, x)$ ، سرعت درون لایه مرزی بوده که علاوه بر تابعیت از  $x$ ، تابع  $y$  نیز می‌باشد. سرعت  $u_e(x)$  درواقع همان سرعتی است که می‌تواند در راستای  $x$  روی لبه‌ی لایه مرزی با فشار از

طریق معادله‌ی برنولی در تماس باشد و از آنجاییکه  $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$ ، می‌توان دید که  $p_A \approx p_B$ .

بنابراین در صورتیکه روش محاسبه‌ی  $u_e(x)$  براساس انحنای سطح را بدانیم، می‌توانیم از طریق رابطه‌ی (۵-۱۱) تغییرات فشار را نیز برآورد نماییم. برای محاسبه  $u_e(x)$  روش معادلات اوایلر و یا روش حل معادلات لاپلاس  $\nabla^2 \phi = 0$  قابل استفاده است. این روش‌ها هریک شامل مباحث گسترده‌ای است که از حوصله‌ی کتاب مکانیک سیالات دوره‌ی کارشناسی خارج است اما در فصل ششم به روش معکوس حل  $\nabla^2 \phi = 0$  اشاره خواهد شد و برخی جریان‌های ساده و پایه‌ای مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. با توضیحات فوق می‌توان معادلات (۵-۹) و (۵-۱۰) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (12-5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (13-5)$$

معادلات (12-5) و (13-5) موسوم به معادلات تقریب لایه مرزی است و تنها برای جریان‌هایی صادق است

$$\text{که } \frac{\delta}{L} \ll 1$$

تمام این فصل به روش‌های حل این معادله روی اجسام می‌پردازد و در واقع به بهانه‌ی حل جریان روی صفحه‌ی تخت روش‌های کلی حل این معادلات را معرفی می‌نماید.

## ۲-۵ روش‌های حل معادلات لایه مرزی

حل معادلات لایه مرزی روی اجسام عمدتاً شامل ۴ روش زیر است:

۱- حل مرتبه‌ی جواب از طریق روش مقایسه‌ی مرتبه‌ها<sup>۱</sup>

۲- حل تشابهی<sup>۲</sup>

۳- حل به روش انتگرالی<sup>۳</sup>

۴- حل عددی<sup>۴</sup>

سه روش اول در اینجا بیان و معرفی می‌شود اما روش چهارم خود درس جداگانه و مبحثی گسترده محسوب می‌گردد.

## ۱-۲-۵ حل جریان لایه مرزی روی صفحه تخت به روش مقایسه‌ی مرتبه‌ها

نکته قابل توجه درباره مسئله‌ی صفحه‌ی تخت این است که:

<sup>1</sup> Order of Magnitude

<sup>2</sup> Similarity Solution

<sup>3</sup> Integral Solution

<sup>4</sup> Numerical Solution

$$u_e(x) = \text{const} \quad (۱۴-۵)$$

این اطلاعات در فصل بعد کاملاً روشن و دلیل این امر نیز واضح تر می گردد. بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۱۴-۵) معادلات (۱۲-۵) و (۱۳-۵) به شکل زیر برای صفحه‌ی تخت ساده می شوند.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۱۵-۵)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (۱۶-۵)$$

روش حل مقایسه‌ی مرتبه‌ها مشابه آن است که در بخش (۱-۵) گفته شد. تنها تفاوت، استفاده از معادله‌ی ممنتوم برای رسیدن به یک رابطه است. بنابراین مرتبه‌ی سمت چپ رابطه‌ی (۱۶-۵) با مرتبه‌ی سمت راست آن برابر قرار داده شده و رابطه‌ی زیر حاصل می شود.

$$\frac{u_{\infty}^2}{L} \approx \nu \frac{u_{\infty}}{\delta^2}$$

در نتیجه:

$$\frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (۱۷-۵)$$

که در آن:

$$\text{Re}_L = \frac{u_{\infty} L}{\nu} \quad (۱۸-۵)$$

از جواب (۱۷-۵) که به سهولت به دست آمد می توان دریافت که رشد لایه مرزی نسبت به طول صفحه با عکس جذر عدد رینولدز متناسب است و عدد تناسب نیز عددی از مرتبه ۱ (یک) است. این رابطه به وضوح نشان می دهد که افزایش عدد رینولدز باعث نازک شدن لایه مرزی نسبت به طول جسم می شود. درواقع می توان چنین نتیجه گرفت:

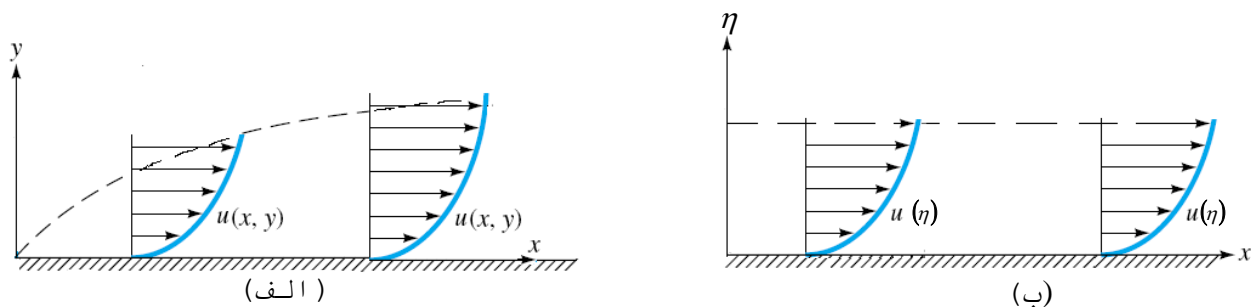
"عدد رینولدز نسبت مکانیزم جابجایی چرخش ها به نفوذ آنهاست."

براساس مشاهدات، تقریب معادلات لایه مرزی از  $\text{Re}_x > 1000$  صادق است. ([4])

## ۲-۲-۵ حل تشابهی جریان روی صفحه تخت

معادلات مورد استفاده برای جریان روی صفحه تخت همان معادلات (۱۵-۵) و (۱۶-۵) است. در برخی از جریان های لایه مرزی، می توان دریافت که نیم رخ های سرعت در راستای  $x$  نسبت به یکدیگر منحنی های

مشابهی ایجاد می‌کنند و دارای ضریب تشابهی متأثر از عوامل جریان هستند. جریان روی صفحه تخت نیز چنین ویژگی‌ای دارد. ویژگی تشابه نیمرخ‌های سرعت این ایده را به وجود آورد که می‌توان صفحه‌ای به عنوان صفحه‌ی محاسباتی یافت که با استفاده از ضریب تشابه، نیمرخ‌های سرعت مختلف در راستای  $x$  در این صفحه یکسان شده و در واقع رشد لایه مرزی روی آن متوقف و ثابت گردد. شکل (۳-۵) صفحات  $y - x$  و  $\eta - x$  را نمایش می‌دهد.



شکل ۳-۵ الف - نیمرخ تشابهی سرعت و ب- صفحه‌ی محاسباتی.

با این مقدمات بلازیوس متغیر تشابهی را به شکل زیر محاسبه و پیشنهاد نمود:

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} \quad (19-5)$$

$$f(\eta) = \frac{\Psi}{\sqrt{\nu x u_e}} \quad (20-5)$$

با استفاده از تعریف تابع جریان و روابط مشتقات زنجیره‌ای و تعاریف (۱۹-۵) و (۲۰-۵) می‌توان جملات مختلف معادله‌ی ممتم (۱۶-۵) را محاسبه نمود:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = f' \sqrt{\nu x u_e} \frac{\partial \eta}{\partial y} = f' \sqrt{\nu x u_e} \cdot \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} = u_e f' \quad (21-5)$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{\nu u_e}{x}} f - \sqrt{\frac{\nu u_e}{x}} \eta f' \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu u_e}{x}} (\eta f' - f) \quad (22-5)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = - \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\nu u_e} x^{-\frac{1}{2}} f - \frac{1}{2} \sqrt{\nu x u_e} f' \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (u_e f') = -f'' \frac{\eta}{2x} u_e \quad (23-5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_e \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} f'' \quad (۲۴-۵)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_e^2}{\nu x} f'''$$

با تشکیل معادله‌ی ممتم (۵-۱۶) که برای صفحه ساده شده است و با توجه به ثابت بودن  $u_e$ ، داریم:

$$u_e f' (-f'' \frac{\eta}{2x} u_e) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu u_e}{x}} (\eta f' - f) u_e \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} f'' = \nu \frac{u_e^2}{\nu x} f'''$$

با ساده کردن این معادله:

$$-\frac{u_e^2 \eta}{2x} f f'' + \frac{1}{2} \frac{u_e^2}{x} (f f'' - \frac{1}{2} \frac{u_e^2}{x} f f'' = \frac{u_e^2}{x} f'''$$

و در نتیجه:

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (۲۵-۵)$$

معادله‌ی فوق موسوم به معادله‌ی بلازیوس است. این معادله از روش سری توانی حل می‌شود و شخصی پس از بلازیوس جواب سری را دقیق‌تر و طی جدولی ارایه نموده است. این جدول همان جدول (۵-۱) است که به صورت زیر ارائه شده است.

جدول ۵-۱ بخشی از جدول حل بلازیوس.

$\eta$	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$
0.0	0.0	0.0	0.3321
0.5	0.0415	0.1659	0.3309
1.0	0.1656	0.3298	0.3230
1.5	0.3701	0.4868	0.3026
2.0	0.6500	0.6298	0.2668
2.5	0.996	0.7513	0.2174
3.0	1.3968	0.8460	0.1614
3.5	1.8377	0.9130	0.1078
4.0	2.3057	0.9555	0.0642
4.5	2.7901	0.9795	0.0340
5.0	3.2833	0.9915	0.0159
6.0	4.2796	0.9990	0.0024
7.0	5.2792	0.9999	0.0002
8.0	6.2792	1.0000	0.0000

از حل جدول ۵-۱ براساس قرارداد در  $\eta = 5$  نسبت  $\frac{u}{u_e}$  به حد قابل قبولی نزدیک به یک است و این نقطه

لبه‌ی لایه مرزی قرارداد می‌شود. بنابراین:

$$\eta = 5 \text{ و } y = \delta$$

لذا براساس رابطه (۵-۱۹) داریم:

$$5 = \delta \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (۵-۲۶)$$

و در رابطه‌ی (۵-۲۶) نیز:

$$\text{Re}_x = \frac{u_e x}{\nu} \quad (۵-۲۷)$$

مشاهده می‌گردد که این جواب از طریق روش مقایسه‌ی مرتبه‌ها نیز برآورده شده بود و در اینجا عدد دقیق تناسب رشد لایه مرزی و عکس جذر رینولدز تعیین گردید.

با استفاده از جدول (۵-۱) که مقادیر  $f'$  و  $f''$  را تعیین کرده است می‌توان مقدار  $\tau_w$  و  $C_f$  را نیز تعیین نمود که داریم:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_e^2} = \frac{\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}}{\frac{1}{2} \rho u_e^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (۵-۲۸)$$

ضریب نیروی پسای کل روی صفحه که ناشی از نیروی اصطکاک است، با انتگرال‌گیری  $C_f$  روی سطح صفحه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$C_D(L) = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_L}} = \frac{1}{L} \int_0^L C_f dx \quad (۵-۲۹)$$

براساس مشاهدات تجربی، نتیجه‌ی بلازیوس برای محاسبه ضریب نیروی پسای کل در بازه  $\text{Re} > 1000$  دقیق است.

جریان در بازه‌ی  $1 < \text{Re} < 1000$  که در محدوده‌ی جریان لایه مرزی نمی‌باشد، توسط ایمائی<sup>۱</sup> (۱۹۵۷) مطالعه گردیده و رابطه‌ی زیر برای آن پیشنهاد شده است:

---

<sup>۱</sup> Imai



$$C_D(L) = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_L}} + \frac{2.3}{\text{Re}_L} \quad (۳۰-۵)$$

نکته‌ی دیگر قابل ذکر از حل بلازیوس این است که مؤلفه‌ی عمودی سرعت در لبه‌ی لایه مرزی صفر نیست. می‌توان با استفاده از معادلات حاصل شده دید که:

$$v(x, \infty) = \frac{0.8604u_e}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (۳۱-۵)$$

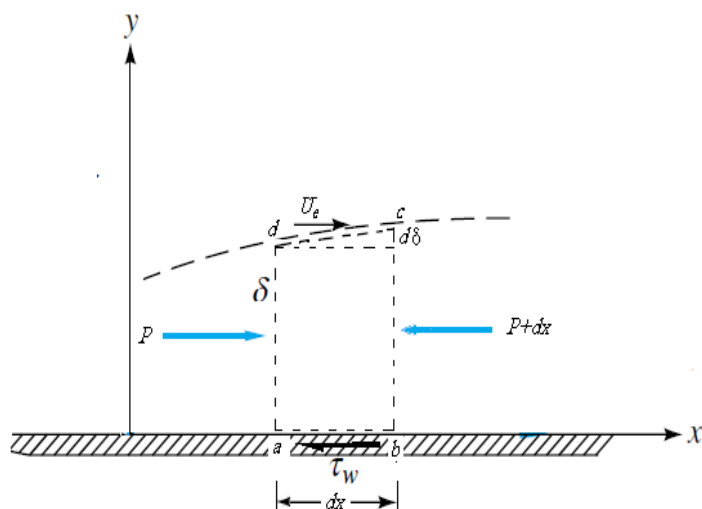
عملاً منظور  $\eta = \infty$  همان  $\eta \geq 6.0$  می‌باشد.

### ۳-۲-۵ حل تقریبی جریان روی صفحه تخت به روش انتگرالی

برای بیان حل تقریبی جریان روی صفحه‌ی تخت به روش انتگرالی ابتدا به توضیح درباره‌ی اساس روش انتگرالی پرداخته می‌شود.

#### ۱-۳-۲-۵ روش انتگرالی

روش انتگرالی یک روش تقریبی است که روی معادلات انتگرال‌گیری شده حرکت در جهت عمود بر سطح جسم به کار می‌رود. به همین منظور ابتدا معادلات لایه مرزی در امتداد  $y$  به صورت انتگرال‌گیری شده ارائه می‌گردند. برای تحقیق این امر، یک ناحیه‌ی بزرگنمایی شده از جسم و لایه مرزی تولید شده روی آن را که در شکل ۴-۵ نمایش داده شده است، در نظر بگیرید.



شکل ۴-۵ حجم کنترل انتگرالی لایه مرزی نازک.

براساس روال گذشته ابتدا دبی‌های جرمی این جریان پایا را محاسبه می‌کنیم.

$$\dot{m}_{ab} = 0 \quad (32-5)$$

$$\dot{m}_{ad} = - \int_0^{\delta} \rho u dy \quad (33-5)$$

$$\dot{m}_{bc} = |\dot{m}_{ad}| + \frac{\partial |\dot{m}_{ad}|}{\partial x} dx = \int_0^{\delta} \rho u dy + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta} \rho u dy \right) dx \quad (34-5)$$

از بقای جرم داریم:

$$\dot{m}_{ab} + \dot{m}_{ad} + \dot{m}_{bc} = -\dot{m}_{dc} \quad (35-5)$$

داریم:

$$\dot{m}_{dc} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta} \rho u dy \right) dx \quad (36-5)$$

به همین ترتیب برای نرخ ممنت‌های ورودی و خروجی داریم:

$$\dot{m}_{ab} = 0 \quad (37-5)$$

$$\dot{m}_{ad} = - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy \quad (38-5)$$

$$\dot{m}_{bc} = \int_0^{\delta} \rho u^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta} \rho u^2 dy \right) dx \quad (39-5)$$

به این ترتیب:

$$\dot{m}om_{dc} = -u_e \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta} \rho u dy \right) dx \quad (40-5)$$

رابطه‌ی (40-5) براساس این منطق که دبی عبوری از وجه  $dc$  از سرعت  $u_e$  تأثیر می‌پذیرد و ممنتوم ایجاد می‌نماید، محاسبه شده است. براین اساس جمع نرخ ممنتوم خطی در راستای  $x$  عبارت است از:

$$\sum \dot{m}om_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta} \rho u^2 dy \right) dx - u_e \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta} \rho u dy \right) dx \quad (41-5)$$

از سوی دیگر نیروهای وارد بر سطوح حجم کنترل در راستای  $x$  به شرح زیر است:

$$\sum F_x = p\delta - (p + dp)(\delta + d\delta) - \tau_w dx + p'd\delta \quad (42-5)$$

بهترین برآورد از  $p'$  اینست که فشاری بین  $p$  و  $p+dp$  است، یعنی:

$$p' = p + \frac{1}{2} dp \quad (43-5)$$

با اعمال رابطه‌ی (43-5) در رابطه‌ی (42-5) و حذف دیفرانسیل‌های مرتبه‌ی دوم و بالاتر داریم:

$$\sum F_x = -dp\delta - \tau_w dx \quad (44-5)$$

با توجه به اینکه می‌توان در لبه‌ی لایه مرزی براساس تقریب لایه مرزی نازک از رابطه‌ی برنولی استفاده کرد، لذا رابطه‌ی (44-5) به شکل زیر قابل بازنویسی است:

$$\sum F_x = \rho u_e du_e \delta - \tau_w dx$$

و در نتیجه با فرض  $\delta = \int_0^{\delta} dy$  داریم:

$$\sum F_x = \rho u_e du_e \int_0^{\delta} dy - \tau_w dx = du_e \int_0^{\delta} \rho u_e dy - \tau_w dx \quad (45-5)$$

براساس تساوی  $\sum F_x = \sum \dot{m}om_x$  و ثابت بودن  $\rho$  و تقسیم بر  $dx$  داریم:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = u_e \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta} u dy \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta} u^2 dy \right) + \frac{du_e}{dx} \int_0^{\delta} u_e dy \quad (46-5)$$

از طرفی می‌توان داشت:

$$u_e \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^\delta u dy \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^\delta u_e u dy \right) - \frac{\partial u_e}{\partial x} \left( \int_0^\delta u dy \right) \quad (47-5)$$

با توجه به اینکه  $u = u_e(x)$  و بقیه عوامل نیز نسبت به  $y$  انتگرال گیری شده و تنها متغیر  $x$  است، مشتقات پاره‌ای به دیفرانسیل‌های کامل نسبت به  $x$  تبدیل شده و با اعمال رابطه‌ی (47-5) در (46-5) داریم:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} \left[ \int_0^\delta (u_e u - u^2) dy \right] + \frac{du_e}{dx} \int_0^\delta (u_e - u) dy \quad (48-5)$$

رابطه‌ی فوق را می‌توان به شکل زیر مرتب کرد:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} \left[ u_e^2 \int_0^\delta \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) \frac{u}{u_e} dy \right] + u_e \frac{du_e}{dx} \int_0^\delta \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (49-5)$$

با تعریف:

$$\theta = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) \frac{u}{u_e} dy \quad (50-5)$$

و همچنین:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (51-5)$$

داریم:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} (u_e^2 \theta) + \frac{du_e}{dx} (u_e \delta^*) \quad (52-5)$$

این رابطه را همچنین می‌توان به شکل زیر نیز نمایش داد:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (2+H) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad (53-5)$$

که در رابطه‌ی فوق  $H$  با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود و به ضریب شکل موسوم است. همچنین  $C_f$  ضریب اصطکاک پوسته‌ای است، یعنی:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (54-5)$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_e^2} \quad (55-5)$$

$\delta^*$  و  $\theta$  که به ترتیب ضخامت جابجایی و ضخامت ممتم نامیده می‌شوند، بیشتر از آنکه تعبیر با اهمیتی داشته باشند، کاربردهای با اهمیت‌تری داشته و عملاً در برآورد ویژگی‌های لایه مرزی به کار می‌روند. ضخامت جابه‌جایی ( $\delta^*$ ) را می‌توان برابر مقدار ضخامت افزوده شده به جداره‌ی جسم دانست، به طوریکه دبی جریان لزج عبوری از جسم برابر دبی جریان غیر لزجی گردد که از روی جسم ضخیم شده عبور می‌کند. به همین ترتیب می‌توان ضخامت ممتم ( $\theta$ ) را برابر ضخامت افزوده شده به جداره‌ی جسم نامید که ممتم جریان لزج عبوری از روی جسم برابر ممتم جریان غیر لزجی گردد که از روی جسم ضخیم شده به اندازه‌ی  $\theta$  عبور می‌کند.

در جریان روی صفحه تخت که مقدار  $u_e$  ثابت است، عملاً معادله‌ی انتگرالی ممتم به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} \quad (56-5)$$

یا

$$\frac{\tau_w}{\rho} = u_e^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (57-5)$$

معمولاً روش انتگرالی به دو صورت به عنوان روش تقریبی مورد استفاده قرار می‌گیرد:

- ۱- با استفاده از حدس پروفیل سرعت و محاسبه  $\delta^*$ ،  $\theta$ ، و  $\tau_w$  و پس از آن رسیدن به نتایج لازم.
- ۲- استفاده از پروفیل‌های سرعت تجربی و توابع برازش شده از آن و محاسبه‌ی  $\delta^*$ ،  $\theta$ ، و  $\tau_w$  و دیگر خواسته‌های جریان.

### ۵-۲-۳-۱-۱ روش انتگرالی به روش حدس زدن پروفیل سرعت

روش حدس زدن پروفیل سرعت ابتدا توسط پل هاوزن<sup>۱</sup> (1921) مطرح شد و دهها سال بکار برده می‌شد. در اینجا به اساس این روش و حاصل آن روی جریان صفحه‌ی تخت پرداخته می‌شود. در این روش ابتدا پروفیل سرعت حدس زده شده و سپس با استفاده از شرایط مرزی فیزیک مورد نظر، پروفیل اصلاح و کامل شده و در مرحله بعد با استفاده از رابطه  $\tau_w$  و نیم‌رخ سرعت حدس زده شده و همچنین تعاریف  $\theta$  و  $\delta^*$  روش کامل و نتایج حاصل می‌شود. برای حل مسئله‌ی صفحه‌ی تخت ابتدا نیم‌رخ سرعت خطی فرض می‌شود:

$$u = a + by$$

با استفاده از شرایط مرزی:

$$u(0) = 0, u(\delta) = u_e$$

داریم:

$$\frac{u}{u_e} = \frac{y}{\delta} \quad (5-58)$$

با استفاده از رابطه‌ی (5-57) و تعریف  $\theta$  داریم:

$$\tau_w = \rho u_e^2 \frac{d}{dx} \left[ \int_0^\delta \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \frac{y}{\delta} dy \right] = \frac{\rho u_e^2}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \quad (5-59)$$

همچنین چون داریم:

$$\tau_w \cong \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \mu \frac{u_e}{\delta} \quad (5-60)$$

در نتیجه با ترکیب روابط فوق:

$$\delta d\delta = \frac{6\nu}{u_e} dx$$

با فرض شروع لایه مرزی از ابتدای صفحه:

$$\frac{1}{2} \delta^2 = \frac{6\nu}{u_e} x \rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{3.464}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (5-61)$$

---

<sup>۱</sup>Pohlhausen

ملاحظه می‌گردد که جواب حاصل شده از رابطه‌ی (۵-۶۱) دارای فرم مشابه جواب بلازیوس بوده اما دارای خطای حدوداً ۳۱ درصدی نسبت به جواب بلازیوس می‌باشد.

همین مسئله با استفاده از نیم‌رخ سرعت درجه ۲ به شکل زیر است:

$$\frac{u}{u_e} = \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \quad (۵-۶۲)$$

که در آن از شرط مرزی سوم  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0$  استفاده شده است.

با پروفیل فوق:

$$\delta^* = \frac{\delta}{3} \quad \theta = \frac{2\delta}{15} \quad \text{و} \quad H = \frac{5}{2}$$

و به روش مشابه:

$$\tau_w = \frac{2\mu u_e}{\delta}$$

$$\delta d \delta = \frac{15\mu dx}{\rho u_e}$$

و در نتیجه:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.5}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (۵-۶۳)$$

که این پروفیل نسبت به پروفیل خطی دارای خطای کمتری بوده و خطا حدود ۱۰٪ می‌باشد. به همین ترتیب می‌توان نیم‌رخ سرعت درجه ۳ را آزمود.

$$u = a + by + cy^2 + dy^3$$

اشکالی که در استفاده از جملات سری توانی برای افزودن درجه‌ی چند جمله‌ای وجود دارد ایجاد و استفاده از شرایط مرزی اضافی است. مثلاً برای این نیم‌رخ، روی جداره‌ی جسم که شرط عدم لغزش برقرار است می‌توان از روی معادله‌ی ممّنتم روی صفحه‌ی تخت دید که:

$$0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (۵-۶۴)$$

بنابراین با شرط‌های زیر نیم‌رخ سرعت درجه ۳ حاصل می‌شود.

$$u(0) = 0, \quad u(\delta) = u_e, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$$

به این ترتیب داریم:

$$\frac{u}{u_e} = \frac{1}{2} \left( \frac{3y}{\delta} - \frac{y^3}{\delta^3} \right)$$

به طریق مشابه:

$$\frac{140}{13} \frac{\rho dx}{u_e} = \delta d\delta \rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (5-65)$$

که این رابطه دارای خطای ۷/۱٪ درصد می‌باشد.

افزایش درجه‌ی چند جمله‌ای علاوه برآنکه نیاز به شرایط مرزی جدید دارد، از سوی دیگر هیچ تضمینی وجود ندارد که در سری‌های توانی بتوان با افزایش درجه‌ی چندجمله‌ای لزوماً به دقت بیشتری دست یافت. به عنوان مثال با آزمودن پروفیل‌های درجه ۴ نمی‌توان به جواب قانع‌کننده‌ای با سری توانی رسید. اما آنچه که ریاضیات درخصوص انتخاب منحنی برازش به ما می‌آموزد استفاده از سری‌های فوریه است. سری‌های فوریه براساس توابع متعامدی مثل سینوس و کسینوس، لژاندر، بسل، لاگر و چبیشف نوشته می‌شود. برای توجه لازم است بدانیم پروفیل خطی اتخاذ شده برای اولین تقریب سری فوریه لژاندری مرتبه‌ی اول است. ثابت می‌شود که هرچه سری فوریه انتخاب شده برای یک تابع نامشخص به درجه‌ی بالاتری میل نماید دقت برآورد افزایش می‌یابد. ضمناً توان‌های پایین‌تر سری‌های فوریه قادرند دقت مشابه سری‌های توانی با توان بالاتر را تولید نمایند. برای مثال به پروفیل سینوسی مرتبه‌ی اول زیر، برای برآورد جریان آرام صفحه‌ی تخت توجه کنید:

$$\frac{u}{u_e} = \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \quad (5-66)$$

براساس این پروفیل و روش انتگرالی داریم:

$$\tau_w = \frac{\pi \mu u_e}{2\delta} = 0.137 \rho \pi^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (5-67)$$

درنتیجه:



$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.8}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (۶۸-۵)$$

ملاحظه می‌گردد جواب رابطه‌ی (۶۸-۵) به مراتب از پروفیل درجه‌ی ۳ سری توانی دقیق‌تر است و خطای آن حدود ۴ درصد است.

برای جریان‌های آشفته روی صفحه‌ی تخت نیز ابتدا فرم جریان آشفته معادلات لایه مرزی نازک باید معرفی شود. گفته شد در جریان آشفته می‌توان معادلات جریان را برحسب پارامترهای متوسط‌گیری زمانی نوشت. این فرم در جریان لایه مرزی نازک با گرادیان فشار به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (۶۹-۵)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (۷۰-۵)$$

که در رابطه‌ی (۷۰-۵)،  $\tau$  به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \quad (۷۱-۵)$$

محاسبات، مشاهدات، تجربیات و تقریب‌های منطقی متعددی انجام یافته است تا تنش برشی جریان آشفته‌ی لایه مرزی به شکل (۷۱-۵) برآورد گردد. مقدار  $-\rho \overline{u'v'}$  یک مقدار نامشخص است که به تنش آشفته‌گی یا تنش رینولدز معروف است. برآورد نمودن تنش رینولدز به بحث تخصصی مدل سازی جریان‌های آشفته برمی‌گردد که از محدوده‌ی هدف نگارش این کتاب خارج است و از مباحث مطالعاتی روز و با تاریخچه و روش‌های مفصل است. اما آنچه از ظاهر تنش‌های رینولدز برمی‌آید، ترکیبی حاصل از نوسانات پرفرکانس سرعت است که برآورده از اغتشاشات حرکتی «کرم‌های چرخش» است.

بر اساس تجربیات حاصله از جریان داخل لوله‌ها مشاهده گردیده است که یک پروفیل با رابطه‌ی لگاریتمی در داخل لایه مرزی برقرار است، یعنی:

$$\frac{\bar{u}}{u^*} \approx \frac{1}{k} \ln \frac{yu^*}{\nu} + B \quad (۷۲-۵)$$

که در آن  $u^*$  سرعت اصطکاکی نامیده می‌شود و رابطه‌ی آن به شرح زیر است:

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (۷۳-۵)$$

با بررسی به عمل آمده برای سطوح بدون گرادیان فشار با  $k=0.41$  و  $B=5.0$  برآورد می‌گردد.

این قانون در نزدیکی لبه‌ی لایه مرزی به شکل زیر است:

$$\frac{u_e}{u^*} = \frac{1}{k} \ln \frac{\delta u^*}{\nu} + B \quad (۷۴-۵)$$

اما تعریف ضریب اصطکاک پوسته‌ای به گونه‌ایست که روابط زیر نیز برقرار است.

$$\frac{u_e}{u^*} = \left(\frac{2}{C_f}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\delta u^*}{\nu} = \text{Re}_\delta \left(\frac{C_f}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (۷۴-۵)$$

بنابراین براساس رابطه‌ی (۷۴-۵) و (۷۵-۵) قانون ضریب اصطکاکی جریان آشفته روی سطوح تخت به شکل زیر بیان می‌شود:

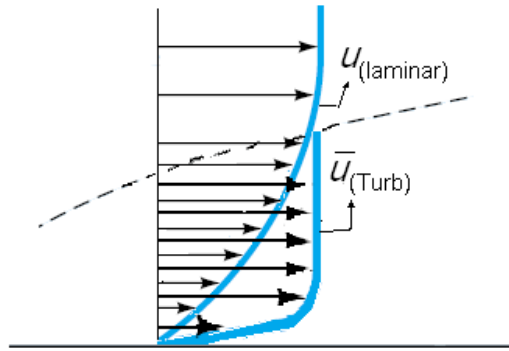
$$\left(\frac{2}{C_f}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 2.44 \ln \left[ \text{Re}_\delta \left(\frac{C_f}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] + 5.0 \quad (۷۶-۵)$$

حل این معادله کمی انرژی بر است و می‌توان از رابطه‌ی زیر به همراه پروفیل‌های سرعت توانی برای مدل کردن  $\bar{u}$  در لایه مرزی استفاده کرد.

$$C_f \approx 0.02 (\text{Re}_\delta)^{-\frac{1}{6}} \quad (۷۷-۵)$$

$$\frac{\bar{u}}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}, \quad n = 7, 8 \quad (۷۸-۵)$$

توجه به این نکته بسیار حائز اهمیت است که در جریان آشفته نمی‌توان  $u$  را برآورد نمود، زیرا  $u$  ناپایاست و این تنها  $\bar{u}$  است که می‌توان برای آن نیم‌رخ متصور بود. همچنین به دلیل تغییر شکل اساسی نیم‌رخ سرعت  $\bar{u}$  در جریان آشفته در مقایسه با نیم‌رخ سرعت  $u$  (که همان  $\bar{u}$  در جریان آرام است) در جریان آرام (شکل ۵-۵)، باید فرم‌های حدسی نیم‌رخ سرعت  $\bar{u}$  نیز عوض شود.



شکل ۵-۵ مقایسه نیمرخ سرعت متوسط زمانی در جریان آشفته و نیمرخ سرعت در جریان آرام.

توجه به این نکته که به دلیل قابلیت بسیار بالاتر جریان آشفته در مقایسه با آرام از لحاظ نفوذ لایه‌های

پرمنتم به لایه‌های کم ممنت، نیمرخ سرعت آشفته تا نزدیکی جداره تقویت شده و  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}|_{y=0}$  در جریان

آشفته در مقایسه با  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$  در جریان آرام بسیار بزرگتر است. به همین دلیل نمی‌توان از رابطه

$\tau_w \cong \mu \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$  در جریان آشفته استفاده کرد. زیرا  $\tau_w \neq \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}|_{y=0}$  و در این تقریب ما  $\bar{u}$  را حدس

زده‌ایم، به همین دلیل باید از روابط (۷۶-۵) یا (۷۷-۵) برای رابطه‌ی  $C_f$  و  $\bar{u}$  استفاده کرد. نیمرخ معروفی

که برای صفحه‌ی تخت در جریان آشفته پیشنهاد می‌شود به شرح زیر است:

$$\frac{\bar{u}}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad (۷۹-۵)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۷۹-۵) و تعریف  $\theta$ :

$$\theta = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) \frac{\bar{u}}{u_e} dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] dy = \frac{7}{72} \delta \quad (۸۰-۵)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۷۷-۵) و رابطه‌ی انتگرالی ممنت:

$$C_f = 0.02 \operatorname{Re} \delta^{-1/6} = 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{7}{72} \delta\right)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0.16}{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}} \quad (۵-۸۱)$$

ملاحظه می‌گردد که مغایر با جریان آرام اینجا رشد لایه مرزی با  $x^{\frac{1}{2}}$  تناسب نداشته و با  $x^{\frac{6}{7}}$  متناسب است که عدد بزرگتری است. به عبارت بهتر در جریان آشفته در رینولدز مشابه ضخامت لایه مرزی بیشتر از ضخامت لایه مرزی در جریان آرام خواهد بود. شلیختینگ<sup>۱</sup> برای جریان‌های در قسمت‌های جلوی صفحه (در  $x$  های کم که ممکن است جریان آرام باشد) به ازای آغاز جریان آشفته در رینولدزهای خاصی رابطه‌ای برای ضریب نیروی پسای صفحه تعریف نموده است:

$$C_D = \begin{cases} \frac{0.031}{\text{Re}_L^{1/7}} - \frac{1440}{\text{Re}_L} & ; \text{Re}_c = 5 \times 10^5 \\ \frac{0.031}{\text{Re}_L^{1/7}} - \frac{8700}{\text{Re}_L} & ; \text{Re}_c = 3 \times 10^5 \end{cases} \quad \begin{matrix} (۵-۸۲-الف) \\ (۵-۸۲-ب) \end{matrix}$$

$Re_c$  عدد رینولدز بحرانی یا رینولدز گذر از حالت آرام به آشفته است. بستگی به زبری سطح و برخی دیگر از عوامل ممکن است  $Re_c$  بین دو مقدار فوق روی صفحه‌ی تخت در نوسان باشد.

#### ۵-۲-۳-۱-۲ روش انتگرالی به روش پروفیل تجربی (روش توییتس<sup>۲</sup>)

در این روش که برای جریان‌های آرام کاربرد دارد، دقت مطلوبی دارد و توابع پیشنهادی در این روش براساس مشاهدات تجربی بدست آمده‌اند. در این روش متغیری به نام  $\lambda$  به شکل زیر معرفی می‌شود که حاصل مشاهدات تجربی است:

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx} \quad (۵-۸۳)$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی انتگرالی ممنتم به فرم بسته که توسط توییتس انجام گرفته، داریم:

$$\theta^2 = \theta_0^2 \left( \frac{u_e^0}{u_e} \right)^6 + \frac{0.45\nu}{u_e^6} \int_0^x u_e^5 dx \quad (۵-۸۴)$$

<sup>۱</sup> Schlichting

<sup>۲</sup> Thwaites

مقدار  $\theta_0$  ضخامت ممتم در  $x=0$  است که معمولاً صفر در نظر گرفته می‌شود. نقطه‌ی جدایی جریان که همان محل  $C_f=0$  تعریف می‌شود، براساس مشاهدات در  $\lambda = -0.09$  اتفاق می‌افتد.

توییتس تنش برشی بی بعد را که به صورت  $S = \frac{\tau_w \theta}{\rho u_e}$  معرفی نموده است با رابطه‌ی تجربی زیر برآورد می‌نماید:

$$S(\lambda) \cong (\lambda + 0.09)^{0.62} \quad (85-5)$$

$S$  را می‌توان به شکل زیر نیز بیان داشت:

$$S = \frac{1}{2} C_f \text{Re}_\theta \quad (86-5)$$

که  $\text{Re}_\theta$  عدد رینولدز تعریف شده براساس ضخامت ممتم است.  $\theta_0 = 0, \lambda = 0, u_e = \text{const}$  برای روشن شدن بهتر روش، برای جریان روی صفحه‌ی تخت که  $\lambda = 0, u_e = \text{const}$  و  $\theta_0 = 0$  داریم:

$$\theta^2 = \frac{0.45 \nu x}{u_e} \quad (87-5)$$

و در نتیجه:

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.671}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad (88-5)$$

که این جواب با جواب بلازیوس تنها یک درصد تفاوت دارد. همچنین:

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_e^2} = \frac{0.671}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad (89-5)$$

مثال ۶-۱ در جریانی که  $u_e(x)$  به صورت زیر معرفی می‌شود، مقدار  $C_f$  در  $\frac{x}{L} = 0.1$  را محاسبه کنید.

$$u_e(x) = u_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

حل: اولاً می‌توان دید که  $\frac{du_e}{dx} = -\frac{u_0}{L}$ ، بنابراین:

$$\theta^2 = \frac{0.45\nu}{u_0^6 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^6} \int_0^x u_0^5 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^5 dx = 0.075 \frac{\nu L}{u_0} \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-6} - 1 \right] \quad (\text{I})$$

و همچنین:

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx} = -\frac{\theta^2 u_0}{\nu L} = -0.075 \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-6} - 1 \right] \quad (\text{II})$$

در  $\frac{x}{L} = 0.1$  داریم:

$$\lambda\left(\frac{x}{L} = 0.1\right) = -0.075 \left[ \left(1 - 0.1\right)^{-6} - 1 \right] = 0.0661 \quad (\text{III})$$

بنابراین:

$$\lambda(x = 0.1L) = (-0.661 + 0.09)^{0.62} = 0.099 = \frac{1}{2} C_f \text{Re}_\theta \quad (\text{VI})$$

با استفاده از روابط فوق می‌توان دید که در  $x=0.1L$ :

$$\frac{\theta^2}{L^2} = \frac{0.0661}{40L/\nu} = \frac{0.0661}{\text{Re}_L} \Rightarrow \text{Re}_\theta = 0.257 \text{Re}_L^{1/2}$$

بنابراین از معادله‌ی (VI):

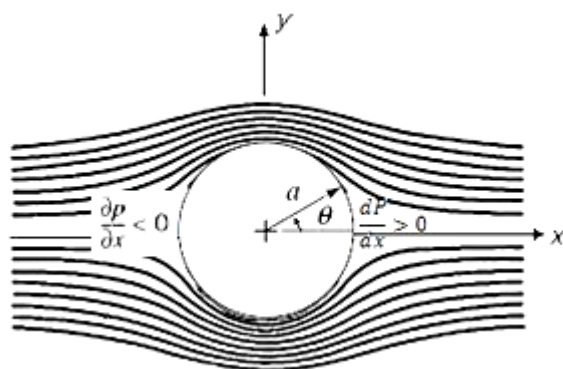
$$0.099 = \frac{1}{2} C_f (0.257 \text{Re}_L^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow C_f = \frac{0.77}{\text{Re}_L^{\frac{1}{2}}}$$

### ۳-۵ مطالعات تجربی جریان حول اجسام مستغرق

درخصوص نتایج و مطالعات مربوط به جریان حول اجسام مستغرق در طیف‌های گسترده‌ای اطلاعات موجود است و ارایه و بحث در خصوص این نتایج مستلزم کتب متعددی است که حتی در صورت پوشش دادن مطالب گذشته باز هم حاوی مطالب به روز نبوده و دانشجویان می‌بایستی همواره از طریق مقالات مرتبط با شاخه‌ی مورد علاقه در جریان آخرین مطالعات قرار گیرند. اما آنچه در کتاب حاضر مورد نظر است، ارایه بخشی از مطالعات تجربی است که حاوی نکات پایه‌ای و اساسی مکانیک سیالات به خصوص از جنبه‌ی تولید پسای فشاری و گرداب‌های پشت اجسام است. همچنین ارایه‌ی جداول کاربردی برای محاسبه‌ی نیروی پسای برخی اجسام نیز در این بخش ارایه می‌گردد. از این جهت فیزیک سیلندر برای مطالعه‌ی کیفیت و اثرات جریان دوبعدی بسیار مناسب بوده و همواره این جسم به دلیل داشتن تمامی شرایط لازم برای پدیده‌های عمومی حول کلیه‌ی اجسام دیگر و به دلیل سادگی هندسی، مورد توجه و استقبال پژوهشگران قرار گرفته است. بنابراین با انتخاب سیلندر و مطالعه جریان در رینولدزهای مختلف و پدیده‌های گوناگون به همراه توجیهات علمی آنها به دانش پایه‌ای خود در زمینه جریان حول کلیه‌ی اجسام مستغرق که در واقع اساس ایرودینامیک و هیدرودینامیک اجسام است می‌افزاییم.

### ۱-۳-۵ جریان حول سیلندر

### ۱-۱-۳-۵ جریان ایده‌آل (پتانسیل) حول سیلندر



شکل ۵-۶ جریان ایده‌آل (غیر لزج، غیر چرخشی) حول سیلندر طویل.

در شکل (۵-۶) خطوط جریان ایده‌آل یا همان جریان غیر چرخشی ناشی از یک جریان غیر لزج نمایش داده شده است. چگونگی حصول این خطوط، توزیع سرعت و توزیع فشار حول سیلندر به طور کامل و مفصل در فصل بعد ارائه خواهد شد و در اینجا به دلیل نیاز به مقایسه و توجیهات مورد نظر، این جریان ارایه شده است.

در جریان ایده‌آل که همان جریان پتانسیل (جریانی که دارای تابع پتانسیل است) نیز تعبیر می‌گردد، کلیه نیروهای پسای سیلندر صفر است که مسلماً دلیل صفر بودن پسای ناشی از اصطکاک کاملاً واضح است. در جریان ایده‌آل حول سیلندر تقارن کاملی در خطوط جریان نسبت به هر دو محور  $x$  و  $y$  وجود دارد که در اینجا به خصوص تقارن نسبت به  $y$  بیشتر حائز اهمیت است.

در برخورد جریان ایده‌آل با سیلندر دو نقطه توقف  $S_1$  و  $S_2$  به ترتیب در پیشانی و پشت سیلندر به وجود می‌آید (دلایل آن در فصل بعد معلوم می‌گردد). که در این نقاط به دلیل توقف سیال، انرژی جنبشی سیال به فشار تبدیل شده و فشار ترمودینامیکی در نقاط  $S_1$  و  $S_2$  به حداکثر مقدار خود یعنی فشار کل که در واقع برابر معیاری از کل انرژی مکانیکی جریان است، می‌رسد. بنابراین نقاط  $S_1$  و  $S_2$  نقاط پرفشار محسوب

می‌گردند. برعکس در نقاط  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  مقدار سرعت حداکثر شده و فشار به حداقل خود می‌رسد. بنابراین

می‌توان نتیجه گرفت که از نقطه‌ی  $S_1$  به طرف  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  فشار رو به کاهش و جریان در حال شتاب گرفتن

است. در حالیکه از نقاط  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  به طرف  $S_2$  فشار رو به افزایش و جریان در حال کند شدن است. به



همین دلیل همانطور که در شکل (۵-۶) دیده می‌شود، دو ناحیه  $\frac{dp}{dx} < 0$  در پیشانی و  $\frac{dp}{dx} > 0$  در

قسمت پشت سیلندر به وجود می‌آید. لذا در یک جریان ایده‌آل می‌توان نتیجه گرفت:

۱- هرگاه انحنای جداره‌ی جریان حالت همگرایی (مثل ربع‌های پیشانی سیلندر) داشته باشد، جریان

تندشونده و  $\frac{dp}{dx} < 0$  است.

۲- هرگاه انحنای جداره‌ی جریان حالت واگرایی (مثل ربع‌های پشتی سیلندر) داشته باشد، جریان

کندشونده و  $\frac{dp}{dx} > 0$  است.

به همین ترتیب می‌توان استنتاج نمود که:

۳- در صورتیکه انحنای جسم بی‌نهایت باشد و جداره مسطح باشد، سرعت غیرچرخشی ثابت مانده و

$\frac{dp}{dx} = 0$  است، مانند صفحه‌ی تخت که از همین واقعیت در حل به روش انتگرالی نیز بهره برده شد.

### ۵-۳-۱-۲ نقطه‌ی جدایی<sup>۱</sup>

اما آنچه در این بخش مورد نظر است جریان لزج حول اجسامی مانند سیلندر است. در جریان لزج بسته به

مقدار عدد رینولدز قطری یعنی  $Re_D = \frac{u_\infty D}{\nu}$  شرایط و شکل جریان از فرم جریان ایده‌آل فاصله گرفته و

طبیعتاً توزیع سرعت و فشار نیز تغییر می‌کند. در اینجا محدوده‌ی  $Re_D \ll 1$  در نظر نبوده و محدوده‌ی

جریان خزشی که نیازمند مقدمات اضافه‌تری است مورد بحث قرار نمی‌گیرد. اما از رینولدزهای بالاتر که

هدف ارایه‌ی مقادیر آن در اینجا نیست، به صورت بسیار کلی می‌توان در جریان آرام شاهد تغییرات

محسوسی در خطوط جریان لزج بود و با مشاهده‌ی این تغییرات به توجیه دیگر پدیده‌های فیزیکی حول

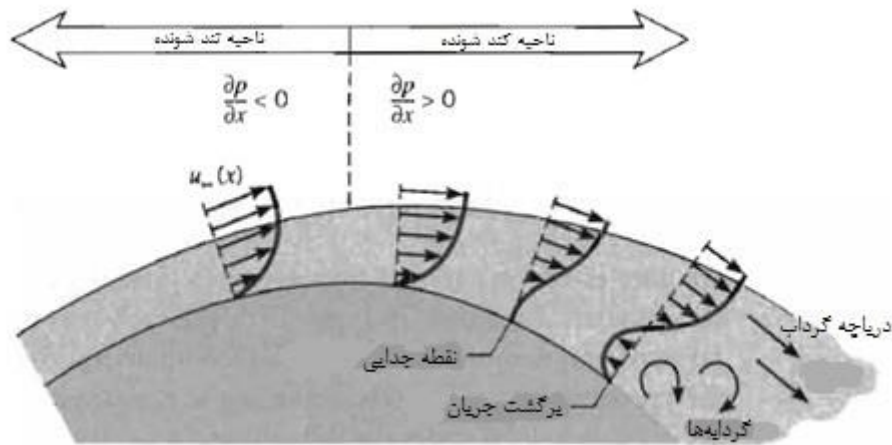
سیلندر پرداخت. اما قبل از ارایه‌ی این شرایط کلی باید به تعریف و شرایط نقطه جدایی به طور جداگانه

پرداخت. بدین منظور می‌توان همانطور که قبلاً نیز اشاره شد طبق تعریف، نقطه‌ی جدایی را به صورت زیر

تعریف کرد:

<sup>1</sup> Separation Point

$$\text{نقطه‌ی جدایی : } \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (۹۰-۵)$$



شکل ۵-۷ وضعیت شماتیک وقوع جدایی در لایه مرزی و تغییرات فشار و سرعت غیرلزج در امتداد جریان روی جسم [۲۰].

همانطور که در شکل ۵-۷ دیده می‌شود، براساس آنچه درباره‌ی جریان پتانسیل حول سیلندر گفته شد، بخشی از انحنای همگرا و واگرای یک جسم که می‌تواند سیلندر نیز فرض شود به همراه تغییرات و رشد لایه مرزی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. براساس تئوری لایه مرزی، بیرون از لایه مرزی می‌توان از تئوری پتانسیل و جریان غیرچرخشی بهره برد و تغییرات فشار ( $p$ ) و سرعت غیرلزج ( $u_\infty$ ) را توضیح داد که در شکل نمایان شده است. در ناحیه‌ی  $\frac{dp}{dx} < 0$  که جریان روی لبه‌ی لایه مرزی تندشونده است شاهد تقویت

ممنتم در لایه‌های درونی لایه مرزی هستیم و سرعت‌های غیرصفر نزدیک جداره جسم نیز تقویت می‌گردد

و ملاحظه می‌گردد که انحنای نیم‌رخ سرعت یعنی  $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} < 0$  است. با مراجعه به مطالعات جریان‌های

لایه مرزی می‌توان با استفاده از تقریب لایه مرزی نازک دید که در  $y=0$ :

$$\frac{dp}{dx} \cong \nu \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} \quad (۹۱-۵)$$

با توجه به این رابطه می‌توان هماهنگی مناسبی بین گرادیان فشار و انحنای سرعت در بخش‌های مختلف

جریان دید. زیرا با توجه به کاهش شیب نیم‌رخ سرعت از جداره تا لبه‌ی مرزی  $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} < 0$  و همچنین

از توجیه جریان غیرچرخشی روی سیلندر  $\frac{dp}{dx} < 0$  است.

حال می‌توان دید که در ناحیه  $\frac{dp}{dx} > 0$ ، روی جداره  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  نیز مثبت می‌گردد و می‌توان دید که شیب

سرعت در نزدیک جداره به دلیل تغییر علامت انحنای نیم‌رخ سرعت به سمت محور  $y$  ها متمایل گردیده و هرچه در امتداد  $x$  جلوتر می‌رویم احتمال وقوع نقطه‌ی جدایی وجود دارد. این موضوع از سویی به دلیل کاهش ممتم جریان غیرلزج در ناحیه‌ی واگرای جسم و در نتیجه کاهش ممتم درون لایه مرزی و کاسته شدن از سرعت‌های بسیار نزدیک جداره، می‌تواند اینگونه توجیه شود که در جایی در ناحیه‌ی واگرا یعنی

$\frac{dp}{dx} > 0$  سرعت‌های بسیار نزدیک جداره صفر می‌شوند و لذا شیب سرعت صفر می‌گردد.

به هر دو طریق می‌توان نتیجه گرفت که نقطه‌ی جدایی تنها در ناحیه  $\frac{dp}{dx} > 0$  محتمل است و به هیچ

عنوان نمی‌توان جدایی جریان را در نواحی  $\frac{dp}{dx} < 0$  و یا  $\frac{dp}{dx} = 0$  در شرایط یاد شده انتظار داشت.

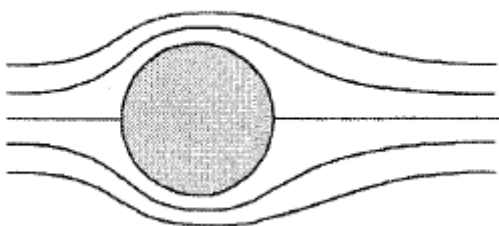
پس از وقوع نقطه جدایی، جریان اصلی رو به پایین دست جریان تماس خود را با جداره جسم از دست داده و عملاً دیگر انحنای جسم تعیین‌کننده‌ی تغییرات فشار و یا سرعت غیرچرخشی جریان اصلی نبوده و به عبارتی این مقادیر دیگر تغییرات محسوسی نخواهند کرد. پس می‌توان نتیجه گرفت:

پس از نقطه جدایی، تماس جریان اصلی رو به پایین دست با جداره‌ی جسم قطع شده و دیگر فشار تابع انحنای سطح نخواهد بود. عملاً معنی جدایی همین است و از نقطه‌ی جدایی به بعد جریان ثانویه و گردابی تولید می‌گردد که به آن گرداب جدایش نیز می‌گویند.

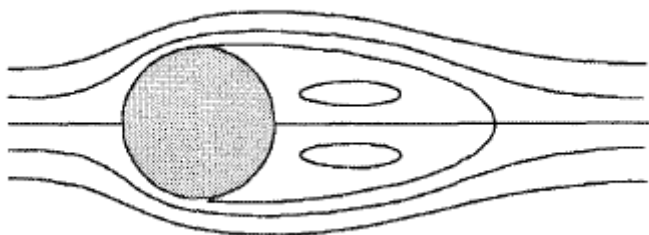
### ۵-۳-۲ جریان حقیقی حول سیلندر

در بررسی‌های به عمل آمده می‌توان در رینولدزهای مختلف به شکل‌های شماتیک زیر جریان حول سیلندر را مشاهده نمود، بدین منظور شکل (۵-۸) جریان در رینولدزهای مختلف را به صورت نمادین نشان می‌دهد.

در شکل (۵-۸) در رینولدزهای مختلف شماتیک‌هایی تنها برای توجیه پدیده‌ها و نقش بستن کیفی پدیده‌ها نمایش داده است و در کتب مرجع می‌توان نتایج عینی تجربی را نیز مشاهده نمود. همانطور که گفته شد در جریان خزشی و رینولدزهای کم، شکل جریان شبیه جریان غیرچرخشی بوده ولی توزیع فشار به هیچ وجه با معادله‌ی برنولی و انحنای سطح قابل توجیه نبوده و فشار تابع معادله‌ی لاپلاس خواهد بود که هدف این بخش ارایه و اثبات آن نمی‌باشد. همانطور که در قسمت (الف) دیده می‌شود هیچ گرداب جدایی رخ نداده است، همچنین باید توجه داشت که تا فاصله‌ی قابل توجهی از جسم جریان کاملاً چرخشی است و نمی‌توان از توجیه برنولی استفاده نمود. در شکل (ب) با افزایش رینولدز دو گرداب به صورت کاملاً متقارن نسبت به محور  $x$  ها تولید می‌شوند که با افزایش رینولدز در محل خود ساکن مانده و تا رینولدز حدود ۴۰ تنها به سمت پایین جریان کش می‌آیند و تغییر اندازه نمی‌دهند. از رینولدز حدود ۱۰۰ به بعد، گردابه‌های نوسانی



الف- جریان خزشی بدون جدایی  $Re_D \approx 1$  (در این جریان با وجود نبودن گرداب، توزیع فشار متفاوت از جریان غیر چرخشی است).



ب- جریان با دو گرداب ساکن  $10 < Re_D < 40$



پ- جریان آرام با گرداب‌های نوسانی  $40 < Re_D < 150$  (گردابه‌های کارمن)



ت- جریان آرام با گرداب‌های نوسانی با فرکانس بالا و ایجاد ناحیه‌ی گرداب عریض‌تر  $10^3 < Re_D < 10^5$  (از رینولدز ۱۰۰۰ به بعد تئوری لایه مرزی قابل استفاده است).



ث- جریان آشفته  $3.5 \times 10^6 < Re_D < 10^5$



د- جریان آشفته با الگویی به نام کوهرنت (Coherent Structure)  $Re_D > 3.5 \times 10^6$

شکل ۵-۸ شماتیک جریان واقعی حول یک سیلندر واقعی .

تولید می‌گردند که به صورت تناوبی و غیر متقارن در پشت سیلندر تولید شده و در امتداد پشت سیلندر تا فواصل طولانی حرکت نموده و بر اثر لزجت میرا می‌شوند. (این گردابه‌ها معروف به گردابه‌های "کارمن" هستند). این حالت در شکل (پ) دیده می‌شود.

جریان دنباله‌ی سیلندر همانند یک دم مارپیچ دیده می‌شود که مارپیچ نوسان داشته و دارای فرکانس معینی است. با افزایش عدد رینولدز و افزایش فرکانس گرداب‌های نوسانی، ناحیه‌ای در پشت سیلندر مملو از گرداب‌های غیرمتقارن نوسانی نسبت به محور  $x$  ها تولید می‌شود که به ناحیه‌ی جدایی و یا خیابان گرداب موسوم است. البته این اصطلاح در شکل (پ) نیز به نوعی قابل استفاده است. این وضعیت در شکل (ت) دیده می‌شود و تا رینولدز بحرانی تنها با تغییر فرکانس گردابه‌ها ادامه می‌یابد. تا به اینجا جریان در رژیم آرام قرار داشته و مشاهده می‌شود که وجود گردابه‌ها به هیچ وجه دلیل بر آشفته بودن جریان نبوده است.

عملاً از رینولدز بحرانی  $3 \times 10^5$  به بعد جریان آشفته می‌گردد و دیگر نمی‌توان نظم مشخصی در گردابه‌های پشت سیلندر دید و البته نقطه‌ی جدایی به دلیل تقویت ممنتم جریان پس از آغاز شدن رژیم آشفته به تعویق می‌افتد و عملاً ناحیه‌ی جدایی همانطور که در شکل (ث) دیده می‌شود در مقایسه با ناحیه جدایی رژیم آرام بسیار کوچکتر است. قبلاً بیان شد که جریان آشفته دارای ویژگی پرنفوذی ممنتم در لایه‌های درونی و زیرین‌تر لایه مرزی است. بنابراین با تقویت ممنتم سرعت‌های نزدیک جداره در رژیم آشفته روند صفر شدن این سرعت‌ها کندتر شده و لذا  $\frac{dp}{dx}$  در پایین‌دست‌تر قادر به توقف جریان بوده و جدایی دیرتر رخ می‌دهد و ناحیه جدایی نازک‌تر می‌شود.

در شکل (د) که در رینولدزهای بسیار بالا رخ می‌دهد یک شکل البته متغیر با رینولدز قابل تشخیص در مجموعه‌ی خیابان گرداب دیده شده که البته به معنی ایجاد نظم یا آرام شدن جریان نمی‌باشد و رژیم جریان کاملاً آشفته است. این الگو به الگوی «کوه‌رنت» مشهور است.

نکته‌ی قابل توجه در قسمت (ت) از شکل (۵-۸) این است که در این بخش پس از رینولدز ۱۰۰۰ می‌توان

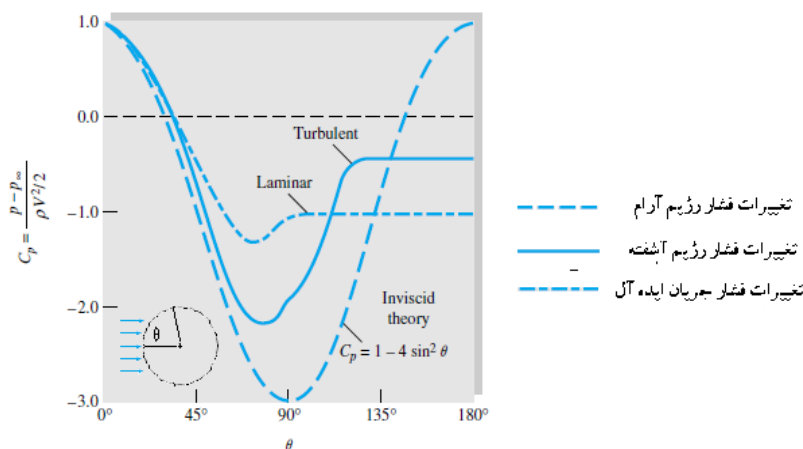
از توجیه‌های ارایه شده درباره اثرات  $\frac{dp}{dx}$  که مبتنی بر تئوری لایه مرزی نازک بحث شد استفاده کرد. البته

این نظریه که همواره  $\frac{dp}{dx}$  مثبت یکی از اساسی‌ترین عوامل تولید گرداب است، محدود به تئوری لایه مرزی

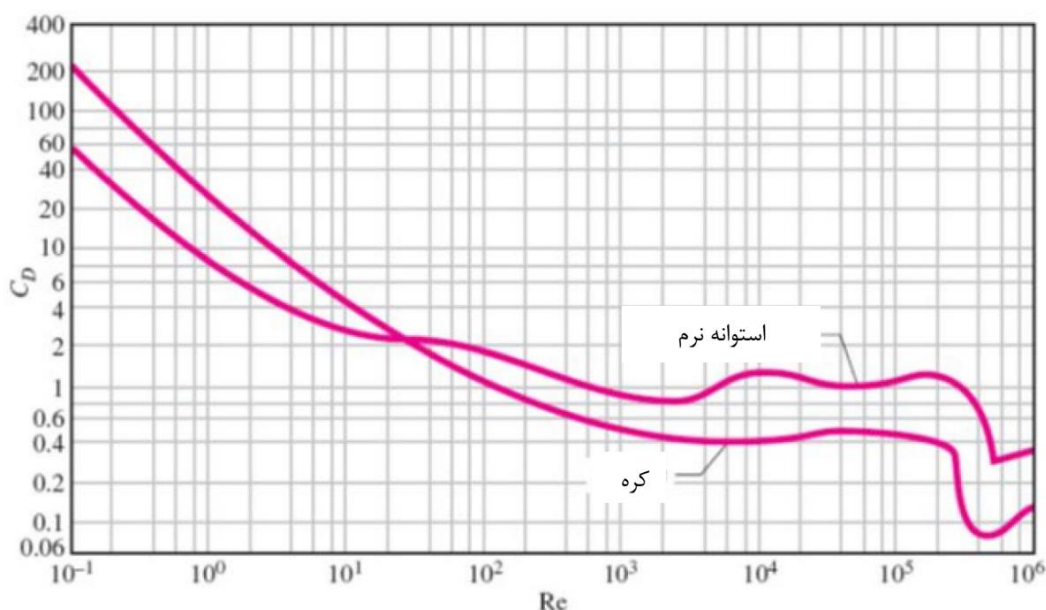
نازک نمی‌باشد. در شکل (۵-۹) تغییرات ضریب فشار یا همان فشار بی‌بعد نسبت به زوایای مختلف روی

سیلندر در رژیم آرام و آشفته نسبت به جریان ایده‌آل نمایش داده شده است که عملاً با توجیه نقطه‌ی

جدایی و انحراف تغییرات فشار ناشی از اثرات جداره‌ی جسم پس از وقوع جدایی کاملاً تطبیق می‌نماید.



شکل ۵-۹ توزیع فشار حول سیلندر در شرایط جریان غیرچرخشی، لزج آرام و لزج آشفته [۴].



شکل (۵-۱۰) تغییرات ضریب پسای سیلندر و کره نسبت به  $Re_D$  [۴].

در شکل (۵-۱۰) به دلیل نزدیکی جریان‌های حقیقی سیلندر و کره و توجیه مشابه این دو هندسه از دید جریان دوبعدی، در توجیه ضریب پسای جریان حول آنها، منحنی تغییرات ضریب پسای کره و سیلندر نسبت به رینولدز قطری ارایه گردیده است.

ضریب پسا، برابر نسبت نیروی مقاوم (پسا) به انرژی جنبشی جریان آزاد دوردست تعریف می‌شود، یعنی:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} \quad (۵-۹۲)$$

در رینولدزهای پایین که گرداب وجود ندارد و یا دو گردابه‌ی اولیه‌ی تولید شده بسیار کوچک است. نقش اصلی تولید نیروی پسا به عهده اصطکاک بوده و در نتیجه  $C_D$  از  $C_f$  تأثیر پذیرفته و این نکته در رینولدزهای زیر ۱۰۰ برای سیلندر در شکل (۵-۱۰) که  $C_D$  به صورت خطی تنزل می‌یابد کاملاً هویدا است.

از رینولدز حدود ۱۰۰ به بالا اثرات گردابه‌ها در ضریب پسا هویدا می‌گردد. به دلیل انحراف جریان پشت سیلندر از شکل ایده‌آل و جدا شدن جریان در فشاری بسیار کمتر از فشار پیشانی (فشار کل) سیلندر، جریان گردابی پشت سیلندر فشاری به مراتب کمتر از ناحیه‌ی پیشانی سیلندر دارد، زیرا نیمه پیشانی سیلندر از الگوی ایده‌آل جریان انحراف محسوسی نیافته است. بنابراین بین پشت و جلوی سیلندر اختلاف فشار قابل توجه‌تری به وجود آمده، در نتیجه نیروی متعادل‌ی ناشی از گردابه‌ها و اختلاف فشار علاوه بر پسای

اصطکاک به وجود می‌آید. به این ترتیب نیروی پسای فشاری نیز به پسای اصطکاکی اضافه می‌شود. بین رینولدز ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ تقریباً تعادلی بین این دو نیروی پسا وجود دارد. اما از رینولدز ۱۰۰۰ به بعد عملاً تنها حاکم و تعیین‌کننده نیروی پسا، همان پسای فشاری بوده که با تغییر الگوهای مختلف گردابه‌ها روند تغییرات  $C_D$  نیز کمی متغیر می‌باشد. اما اساساً روند کلی آن نزولی بوده و این دلیل افزایش رینولدز و ممنتم جریان و تأخیر بیشتر نقطه‌ی جدایی است، این امر پس از آشفته شدن جریان در رینولدز  $3 \times 10^5$  کاملاً مشهود است و افت قابل توجه  $C_D$  نیز به همین علت است.

توجیه مشابهی می‌توان برای کره، یا هر جسم دیگری به کار برد. در جداول ۵-۱ و ۵-۲، اجسامی با شکل‌های مختلف و ضریب پسای آن‌ها برای جریان‌های با رینولدز بیش از حد پایین جریان‌های لایه مرزی ارائه شده است که همگی به صورت تجربی حاصل آمده است.



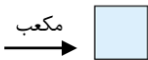
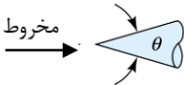
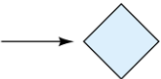
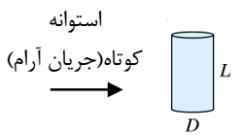
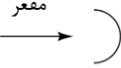

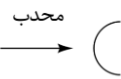

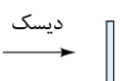
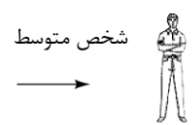
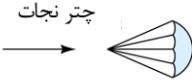
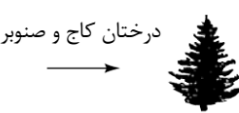
جدول ۵-۱ ضریب پسای اجسام دوبعدی با فرض  $Re \geq 10^4$  [۴].

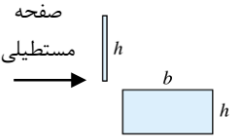
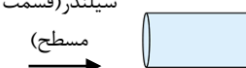
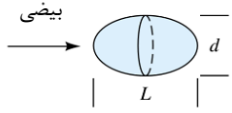
هندسه	ضریب پسا بر اساس سطح پیشانی	هندسه	ضریب پسا بر اساس سطح پیشانی	هندسه	ضریب پسا بر اساس سطح پیشانی
سیلندر مربعی	2.1	نیم استوانه	1.2	صفحه	2.0
				صفحه نازک عمود به دیوار	1.4
		مثلث متساوی الاضلاع	1.7		
			1.6	شش ضلعی	1.0
			2.0		0.7

هندسه	ضریب پسا بر اساس سطح پیشانی																		
قسمت دماغه گرد شده	<table> <tr> <td><math>L/H:</math></td> <td>0.5</td> <td>1.0</td> <td>2.0</td> <td>4.0</td> <td>6.0</td> </tr> <tr> <td><math>C_D:</math></td> <td>1.16</td> <td>0.90</td> <td>0.70</td> <td>0.68</td> <td>0.64</td> </tr> </table>	$L/H:$	0.5	1.0	2.0	4.0	6.0	$C_D:$	1.16	0.90	0.70	0.68	0.64						
$L/H:$	0.5	1.0	2.0	4.0	6.0														
$C_D:$	1.16	0.90	0.70	0.68	0.64														
قسمت دماغه مسطح	<table> <tr> <td><math>L/H:</math></td> <td>0.1</td> <td>0.4</td> <td>0.7</td> <td>1.2</td> <td>2.0</td> <td>2.5</td> <td>3.0</td> <td>6.0</td> </tr> <tr> <td><math>C_D:</math></td> <td>1.9</td> <td>2.3</td> <td>2.7</td> <td>2.1</td> <td>1.8</td> <td>1.4</td> <td>1.3</td> <td>0.9</td> </tr> </table>	$L/H:$	0.1	0.4	0.7	1.2	2.0	2.5	3.0	6.0	$C_D:$	1.9	2.3	2.7	2.1	1.8	1.4	1.3	0.9
$L/H:$	0.1	0.4	0.7	1.2	2.0	2.5	3.0	6.0											
$C_D:$	1.9	2.3	2.7	2.1	1.8	1.4	1.3	0.9											

سیلندر بیضوی	آرام	آشفته
1:1	1.2	0.3
2:1	0.6	0.2
4:1	0.35	0.15
8:1	0.25	0.1

جدول ۵-۲ ضریب پسا بر اساس سطح پیشانی  
 $R_e \geq 10^4$  [۴].

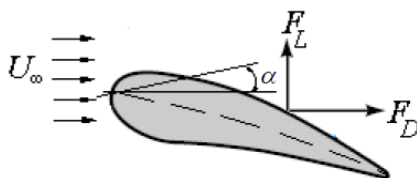
ضریب پسا بر اساس سطح پیشانی		جسم																			
	1.07		<table><tr><td><math>\theta</math>:</td><td>10°</td><td>20°</td><td>30°</td><td>40°</td><td>60°</td><td>75°</td><td>90°</td></tr><tr><td><math>C_D</math>:</td><td>0.30</td><td>0.40</td><td>0.55</td><td>0.65</td><td>0.80</td><td>1.05</td><td>1.15</td></tr></table>	$\theta$ :	10°	20°	30°	40°	60°	75°	90°	$C_D$ :	0.30	0.40	0.55	0.65	0.80	1.05	1.15		
$\theta$ :	10°	20°	30°	40°	60°	75°	90°														
$C_D$ :	0.30	0.40	0.55	0.65	0.80	1.05	1.15														
	0.81		<table><tr><td><math>L/D</math>:</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>10</td><td>20</td><td>40</td><td><math>\infty</math></td></tr><tr><td><math>C_D</math>:</td><td>0.64</td><td>0.68</td><td>0.72</td><td>0.74</td><td>0.82</td><td>0.91</td><td>0.98</td><td>1.20</td></tr></table>	$L/D$ :	1	2	3	5	10	20	40	$\infty$	$C_D$ :	0.64	0.68	0.72	0.74	0.82	0.91	0.98	1.20
$L/D$ :	1	2	3	5	10	20	40	$\infty$													
$C_D$ :	0.64	0.68	0.72	0.74	0.82	0.91	0.98	1.20													
	1.4		<table><tr><td>Porosity:</td><td>0</td><td>0.1</td><td>0.2</td><td>0.3</td><td>0.4</td><td>0.5</td></tr><tr><td><math>C_D</math>:</td><td>1.42</td><td>1.33</td><td>1.20</td><td>1.05</td><td>0.95</td><td>0.82</td></tr></table>	Porosity:	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	$C_D$ :	1.42	1.33	1.20	1.05	0.95	0.82				
Porosity:	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5															
$C_D$ :	1.42	1.33	1.20	1.05	0.95	0.82															
	0.4		<table><tr><td><math>C_D</math>:</td><td>0.95</td><td>0.92</td><td>0.90</td><td>0.86</td><td>0.83</td><td>0.80</td></tr></table>	$C_D$ :	0.95	0.92	0.90	0.86	0.83	0.80											
$C_D$ :	0.95	0.92	0.90	0.86	0.83	0.80															
	1.17		$C_D A \approx 9 \text{ ft}^2$ $C_D A \approx 1.2 \text{ ft}^2$																		
	1.2		<table><tr><td><math>U, \text{ m/s}</math>:</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td></tr><tr><td><math>C_D</math>:</td><td><math>1.2 \pm 0.2</math></td><td><math>1.0 \pm 0.2</math></td><td><math>0.7 \pm 0.2</math></td><td><math>0.5 \pm 0.2</math></td></tr></table>	$U, \text{ m/s}$ :	10	20	30	40	$C_D$ :	$1.2 \pm 0.2$	$1.0 \pm 0.2$	$0.7 \pm 0.2$	$0.5 \pm 0.2$								
$U, \text{ m/s}$ :	10	20	30	40																	
$C_D$ :	$1.2 \pm 0.2$	$1.0 \pm 0.2$	$0.7 \pm 0.2$	$0.5 \pm 0.2$																	

ضریب پسا بر اساس سطح پیشانی		جسم																										
	<table><tr><td><math>b/h</math></td><td>1</td><td>5</td><td>10</td><td>20</td><td><math>\infty</math></td></tr><tr><td></td><td>1.18</td><td>1.2</td><td>1.3</td><td>1.5</td><td>2.0</td></tr></table>	$b/h$	1	5	10	20	$\infty$		1.18	1.2	1.3	1.5	2.0		<table><tr><td><math>L/d</math></td><td>0.5</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td></td><td>1.15</td><td>0.90</td><td>0.85</td><td>0.87</td><td>0.99</td></tr></table>	$L/d$	0.5	1	2	4	8		1.15	0.90	0.85	0.87	0.99	
$b/h$	1	5	10	20	$\infty$																							
	1.18	1.2	1.3	1.5	2.0																							
$L/d$	0.5	1	2	4	8																							
	1.15	0.90	0.85	0.87	0.99																							
	<table><tr><td><math>L/d</math></td><td>0.75</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td></td><td>0.5</td><td>0.47</td><td>0.27</td><td>0.25</td><td>0.2</td></tr></table>	$L/d$	0.75	1	2	4	8		0.5	0.47	0.27	0.25	0.2	<table><tr><td>آرام</td><td>آشفته</td></tr><tr><td>0.5</td><td>0.2</td></tr><tr><td>0.47</td><td>0.2</td></tr><tr><td>0.27</td><td>0.13</td></tr><tr><td>0.25</td><td>0.1</td></tr><tr><td>0.2</td><td>0.08</td></tr></table>	آرام	آشفته	0.5	0.2	0.47	0.2	0.27	0.13	0.25	0.1	0.2	0.08		
$L/d$	0.75	1	2	4	8																							
	0.5	0.47	0.27	0.25	0.2																							
آرام	آشفته																											
0.5	0.2																											
0.47	0.2																											
0.27	0.13																											
0.25	0.1																											
0.2	0.08																											

### ۳-۳-۵ طراحی آیرودینامیکی

هدف از آگاهی یافتن از میزان نیروی پسا و اثر انحنای سطح یا گرادیان فشار روی این نیرو و همچنین مکانیزم‌هایی که بتوان عوامل فوق را کنترل کرد، در آیرودینامیک متجلی می‌گردد. در اینجا منظور از آیرودینامیک تنها جریان هوا حول اجسام نبوده و هدف معرفی علمی است که مبتنی بر اطلاعات علم دینامیک سیالات به دنبال یافتن راه حل‌های مناسب‌تر کنترل جریان و اثرات آن روی اجسام پرنده مثل هواپیما و اجزاء آن، موشک‌ها، زیردریایی‌ها، خودروها و توربوماشین‌ها و وسایلی از این دست است.

در بسیاری اوقات مهمترین و رایج‌ترین راه حل قبل از هر نوع کنترلی، طراحی مناسب بدنه جسم مورد نظر در جهت هدف خاص از جریان است. آنچه مسلم است کلی‌ترین هدف آیرودینامیک رسیدن به کمترین نیروی پسا در ازای بیشترین نیروی برآ و یا سرعت رو به جلو است.



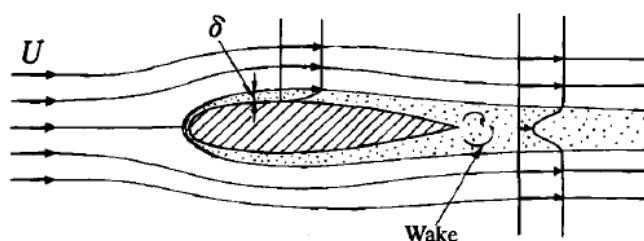
شکل (۵-۱۱) نمایش جسم آیرودینامیکی، نیروی پسا و برآ •

همانطور که در شکل (۵-۱۱) دیده می‌شود، نیروی پسا در جهت جریان و نیروی برآ عمود بر آن تعریف می‌شود. به همین ترتیب:

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho u_{\infty}^2} \quad (۵-۹۳)$$

که  $C_L$  ضریب برآی جسم مورد نظر محسوب می‌شود. مقدار  $C_D$  و  $C_L$  برای هر جسم آیرودینامیکی بستگی کامل به سرعت و زاویه جریان ورودی (بالادست نسبت به جسم) و انحنای جسم دارد. در شکل (۵-۱۱) یک هواپر نشان داده شده است که انحنای بالا و پایین آن یکسان نبوده و در نتیجه توزیع سرعت غیرلزوج و فشار روی سطوح آن یکسان نبوده و همین امر باعث به وجود آمدن  $C_L$  و  $C_D$  است. البته زاویه برخورد جریان بر روی سطوح بسیار با اهمیت و مهم است. این زاویه با  $\alpha$  نمایش داده شده و برابر با زاویه بردار سرعت و مماس بر وتر در پیشانی هواپر است. کاملاً واضح است که طیف بسیار گسترده‌ای از هواپر را

می‌توان یافت که هریک از آنها براساس انحنای سطوح، کاربرد خاص خود را می‌یابد. به عنوان مثال اگر بال هواپیما را در نظر بگیرید، تفاوت منحنی‌های هوابر مقطع بال اصلی باعث ایجاد نیروی برآ رو به بالا شده و هواپیما را در حالت افقی نگه می‌دارد. همچنین بدنه هواپیما نیز نوعی هوابر سه بعدی است که اصطلاحاً فرم دوکی شکل به آن گفته می‌شود. می‌توان دلیل فرم مناسب دوکی شکل را در تمام اجسام آیرودینامیکی متأثر از دلیل عمده کاهش نیروی پسا با کوچک نمودن ناحیه جدایی دانست. زیرا طولانی بودن قسمت واگرای هوابر در مقایسه با قسمت همگرا به منظور ملایم شدن بخش گرادیان مثبت جریان بوده و لذا جدایی دیرتر از آنچه در استوانه رخ می‌دهد اتفاق می‌افتد.



شکل (۵-۱۲) جدایی جریان روی یک هوابر متقارن.

باید توجه داشت که آیرودینامیک در رینولدزهای بالا تحقق یافته است و بحث‌های ارایه شده درخصوص لایه مرزی، جدایی و رژیم‌های مختلف حول سیلندر کاملاً صادق است. بنابراین در می‌یابیم که بدنه هواپیما، خودرو، زیردریایی یا هر جسم متحرک دیگری، هرچه به فرم دوکی با  $\frac{dp}{dx}$  مثبت کمتری نزدیک شود، پسای کمتری ایجاد می‌نماید. اما نکته قابل توجه اینست که هرچقدر بخواهیم  $\frac{dp}{dx}$  را در بخش واگرای جسم کاهش دهیم، باید از شیب واگرایی سطوح جسم کاست و این امر باعث افزایش طول جسم و در نتیجه ازدیاد پسای اصطکاکی می‌شود. بنابراین طول بهینه و گرادیان فشار بهینه شرایطی است که پسای فشاری و پسای اصطکاکی با هم به یک حداقل می‌رسند.

## مسائل فصل پنجم

۱-۵ معادلات ناویر- استوکس برای جریان غیرقابل تراکم دوبعدی را با متغیرهای زیر بی بعد می‌نمایند.

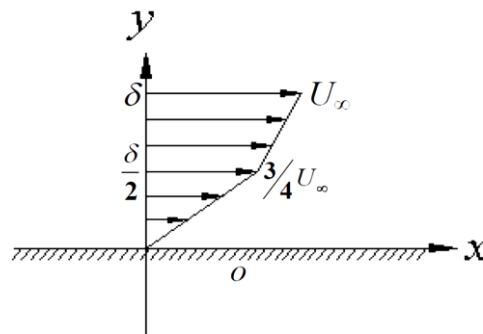
تقریب لایه مرزی را برای فرم بی بعد بر حسب اعداد رینولدز و فرود به کار ببرید.

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad t^* = \frac{tv}{L}, \quad u^* = \frac{u}{u_0}, \quad v^* = \frac{v}{u_0}, \quad p^* = \frac{p}{\rho u_0}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho u_0^2}{\mu}, \quad \text{Fr} = \frac{u_0}{\sqrt{gL}}$$

۲-۵ یک جریان آرام در هنگام عبور از یک صفحه‌ی تخت دارای پروفیل سرعت خط شکسته می‌باشد. با

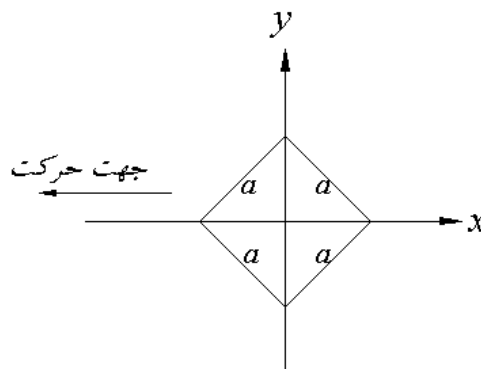
استفاده از معادله‌ی انتگرالی ممتم، معادله‌ی تغییرات ضخامت لایه مرزی و تنش برشی دیواره را تعیین و با نتایج بلازیوس مقایسه کنید.



۳-۵ صفحه‌ای مربع شکل با سرعت  $v_0$  در سیال ساکن که دارای لزجت سینماتیکی  $\nu$  می‌باشد در حرکت

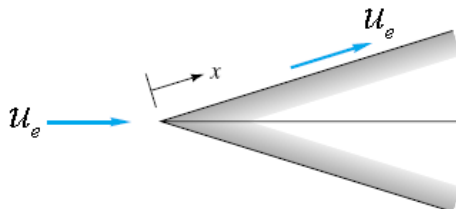
است. با فرض اینکه تأثیر جانبی لایه مرزی در جهت  $z$  ناچیز است، گرمای حاصله از این حرکت را برآورد

کنید (معادله‌ی دیفرانسیل رشد لایه مرزی را  $\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{2}{\sqrt{15}} \frac{\nu}{v_0}$  در نظر بگیرید).



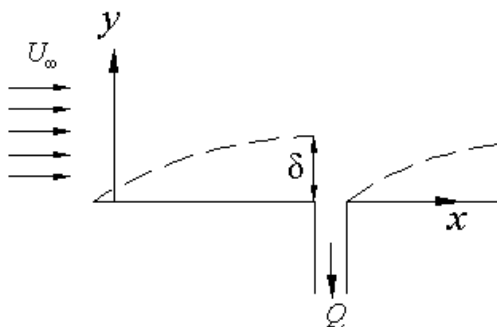
۴-۵ مسئله (۳-۵) را با تحقیق کافی درباره روش تئیتس یکبار دیگر محاسبه و با جواب مقایسه کنید.

۵-۵ جریان روی گوشه‌های تیز را می‌توان با رابطه  $u_e = u_\infty x^m$  بیان داشت. در صورتیکه  $m=1$  فرض شود، با استفاده از روش انتگرالی "پل هاوزن" برآوردی از ضخامت ممتمم ارایه دهید.



۶-۵ مسئله (۵-۵) را با روش "توئیتس" تکرار کنید.

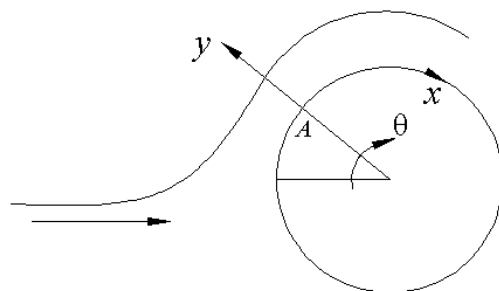
۷-۵ در جریان لزجی روی یک سطح تخت و صلب در نقطه‌ی مشخصی ضخامت لایه مرزی به  $\delta$  رسیده است. در این نقطه شکافی وجود دارد که جریان را مکش می‌نماید. دبی مکش را به گونه‌ای محاسبه کنید تا ضخامت لایه مرزی پس از شکاف صفر گردد.



۸-۵ معادله‌ی انتگرالی ممتمم برای جریان‌های لایه مرزی را با استفاده از انتگرال‌گیری مستقیم از معادلات لایه مرزی محاسبه نمایید.

۹-۵ مسئله (۸-۵) را با فرض داشتن مکش  $V_w$  (سرعت مکش) تکرار کنید.

۱۰-۵ در جریان حول سیلندر سرعت غیر لزج روی سیلندر با رابطه  $u_e(x) = 2u_\infty \sin \theta$  ارایه می‌شود، که در آن  $\theta = \frac{x}{R}$  بوده و رینولدز به اندازه کافی بالاست. با استفاده از روش توئیتس مقدار ضخامت ممتمم در  $\theta = \frac{\pi}{2}$  را محاسبه کنید.



۵-۱۱ مسئله‌ی (۵-۱۰) را با روش پل هاوزن تکرار و پروفیل سینوسی را به کار ببرید. از مقایسه‌ی جواب‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵-۱۲ در جریان آشفته روی صفحه‌ی تخت گاهی از نیم‌رخ  $\frac{1}{8} \left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{\bar{u}}{u_{\infty}}$  استفاده می‌شود. نرخ رشد  $\delta$ ،  $\delta^*$  و  $\theta$  بر حسب  $x$  و رابطه‌ی  $C_f$  را محاسبه نمایید.

۵-۱۳ صفحه‌ای تخت، فلزی و صلب به وزن  $100 \text{ kgf}$  از ارتفاع  $100$  متری سقوط نموده و وارد استخری از آب می‌گردد و پس از رسیدن به سرعت حد در آب تا کف استخر به حرکت خود ادامه می‌دهد. از اصطکاک هوا با صفحه صرف‌نظر نموده و سرعت حد را نصف سرعت برخورد صفحه با سطح آب فرض کنید. مقدار نیروی برای صفحه چقدر است؟ دمای آب استخر  $20$  درجه می‌باشد.

۵-۱۴ یک هواپیمای مدل در داخل هوای اتمسفریک با سرعت  $5 \text{ m/s}$  قرار می‌گیرد. فرض کنید که بالها را می‌توان به صورت صفحات تخت در نظر گرفت که طول هر یک  $10 \text{ cm}$  و عرض مربوطه  $25 \text{ cm}$  می‌باشد. مقادیر  $\delta$  و  $\delta^*$  را در لبه‌ی انتهایی بال به دست آورید و مقدار نیروی مقاوم حرکت این هواپیما را با فرض هوای  $15^\circ \text{C}$  به دست آورید.

(جواب:  $D = 9.063 \times 10^{-4} \text{ N}$  ,  $\delta^* = 0.1684 \text{ cm}$  ,  $\delta = 0.4866 \text{ cm}$ )

۵-۱۵ هوا در دمای  $30^\circ \text{C}$  بر روی یک دیواره تخت با سرعت  $5 \text{ m/s}$  جریان دارد. طول صفحه در جهت جریان هوا، یک متر و عرض آن،  $0.5 \text{ m}$  می‌باشد. فرض کنید که پروفیل سرعت با رابطه‌ی زیر داده شده است:

$$\frac{u}{U} = 2\frac{y}{\delta} - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$$

نیروی مقاوم (Drag) با این پروفیل سرعت را با نیروی مقاوم در حالتی که سرعت از یک پروفیل خطی پیروی می‌کند، مقایسه نمایید (پروفیل خطی:  $\frac{u}{U} = \frac{y}{\delta}$ ).

(جواب:  $D = 0.0173 \text{ N}$ : بلازیوس ,  $D = 0.0171 \text{ N}$ : غیرخطی ,  $D = 0.015 \text{ N}$ : خطی)

۵-۱۶ با حرکت جریان بر روی یک صفحه‌ی تخت ضخامت لایه مرزی افزایش می‌یابد. اما اگر به مرور به عرض صفحه اضافه کنیم، از اثر افزایش ضخامت لایه‌ی مرزی کاسته می‌شود. رابطه‌ای برای افزایش عرض

صفحه به دست آورید، به گونه‌ای که ضخامت لایه مرزی از مقدار  $\delta_1$  که در  $x_1$  رخ داده و عرض صفحه در آن  $b_1$  بوده، فراتر نرود.



# فصل ششم

## جریان‌های پتانسیل

## ۱-۶ مقدمه

همانطور که در بخش سینماتیک جریان گفته شد، در صورتی که جریانی غیرلزج فرض شود و قبلاً چرخشی در جریان نبوده باشد، همچنان چرخش صفر خواهد ماند و جریان غیرچرخشی است. اما آنچه مسلم است یک میدان غیرچرخشی الزاماً غیر لزج نمی‌باشد، اما رفتاری غیر لزج یعنی بدون اثر لزجت که همان چرخش است خواهد داشت. بیرون لایه مرزی را می‌توان مثالی از این شرایط دانست. در هر صورت بیان شد که در جریان غیرچرخشی:

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (۱-۶)$$

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \phi = 0 \quad (۲-۶)$$

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi \quad (۳-۶)$$

که  $\phi$  همان تابع پتانسیل بوده و تنها در میدان غیرچرخشی وجود دارد. از سویی در میدان غیرچرخشی که اثرات لزجت وجود ندارد امکان استفاده از معادله‌ی اوپلر وجود دارد، یعنی:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} \quad (۴-۶)$$

از سویی می‌توان ثابت کرد:

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{\nabla} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \vec{V} \times \vec{\zeta} \quad (۵-۶)$$

بنابراین با توجه به اینکه

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \quad (۶-۶)$$

در نتیجه در جریان غیرچرخشی معادله (۴-۶) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\rho \vec{\nabla} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \vec{\nabla} p - \rho \vec{g} = 0 \quad , \quad \vec{g} = -\vec{\nabla} g_z \quad (۷-۶)$$

درحالتی که بردار تغییر وضعیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad (۸-۶)$$

و همچنین برای هر اسکالر دلخواه  $f$ :

$$df = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} \quad (۹-۶)$$

باضرب داخلی معادله‌ی (۷-۶) در  $d\vec{r}$  داریم ( $\rho$  ثابت است):

$$\rho d\left(\frac{V^2}{2}\right) + dp + \rho g dz = 0 \quad (۱۰-۶)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۱۰-۶) با فرض  $\rho$  ثابت داریم:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \quad (۱۱-۶)$$

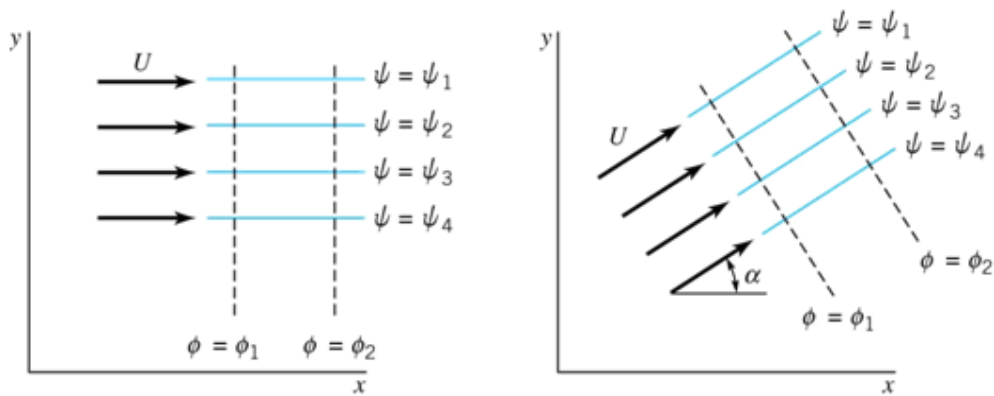
بنابراین ثابت شد که در جریان غیرچرخشی بین هر دو نقطه‌ی دلخواه از میدان رابطه‌ی برنولی برقرار بوده و دیگر برای بهره بردن از معادله‌ی برنولی محدود به دو نقطه از خط جریان یک میدان غیر لزج نخواهیم بود.

## ۲-۶ جریان‌های پتانسیل پایه‌ای

از آن جایی که در این فصل هدف حل معادله‌ی لاپلاس نمی‌باشد، از روش معکوس برای بررسی و یافتن ویژگی‌های جریان پتانسیل استفاده می‌شود. روش معکوس در واقع، یافتن توابع جریان پتانسیل جریان‌های ساده از روی تعریف ویژگی‌های آنها و سپس ترکیب آنها و یافتن توابع جریان‌های پیچیده‌تر است.

### ۱-۲-۶ جریان یکسو (یکنواخت)

جریان یکسو یعنی جریانی که با سرعت ثابت در یک جهت (مثلاً محور  $x$  ها) در جریان است. شکل (۱-۱) نمایانگر جریان یکسو می‌باشد.



شکل ۱-۱ جریان یکسو.

در این جریان می‌دانیم:

$$u = U_{\infty}, \quad v = 0 \quad (۱۲-۶)$$

بنابراین:

$$U_{\infty} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

و لذا

$$\psi = U_{\infty} y + c \quad (۱۳-۶)$$

که با انتخاب  $c = 0$  داریم:

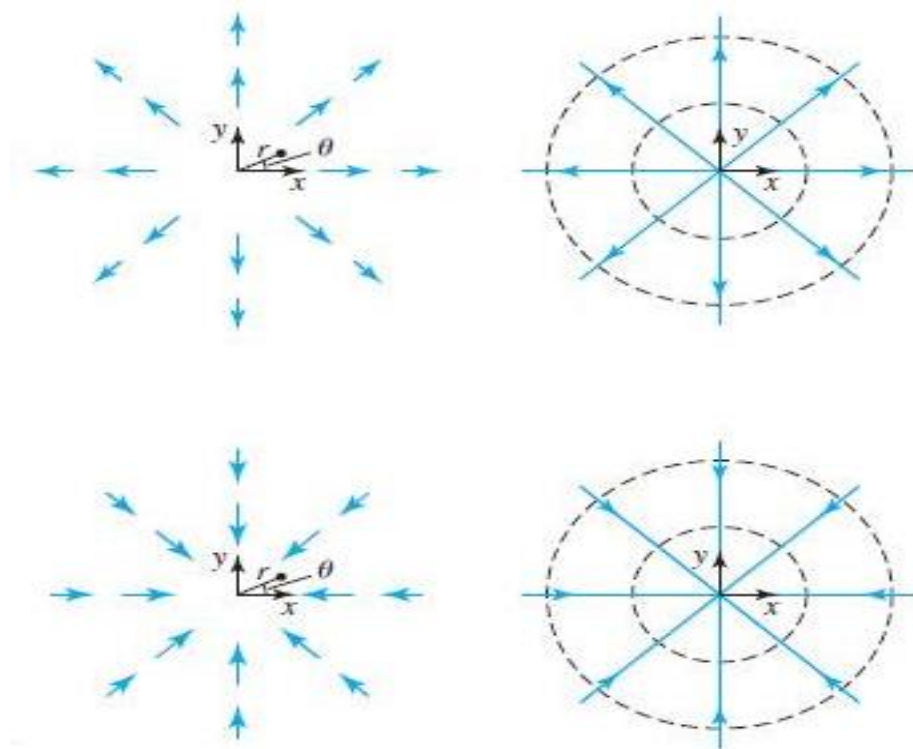
$$\psi = U_{\infty} y = U_{\infty} r \sin \theta \quad (۱۴-۶)$$

به همین ترتیب:

$$\phi = U_{\infty} x = U_{\infty} r \cos \theta \quad (۱۵-۶)$$

## ۲-۲-۶ جریان چشمه و چاه

در شرایطی که از یک نقطه جریان به صورت کاملاً شعاعی به طرف بیرون جریان پیدا کند، این جریان را چشمه می‌گویند و در صورتی که مسیر عکس طی شود، جریان را چاه می‌گویند. نمایی شماتیک در شکل (۲-۶) از یک چشمه و چاه نشان داده شده است.



شکل ۶-۲ جریان چشمه و چاه.

دبی این جریان در واحد عمق  $q$  فرض می‌شود، لذا:

$$V_r = \frac{q}{2\pi r}, \quad V_\theta = 0 \quad (۱۶-۶)$$

بنابراین

$$\frac{q}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rightarrow \psi = \frac{q}{2\pi} \theta \quad (۱۷-۶)$$

مقدار  $\frac{q}{2\pi}$  را برابر  $m$  در نظر گرفته و آن را قدرت چشمه می‌گویند. بنابراین:

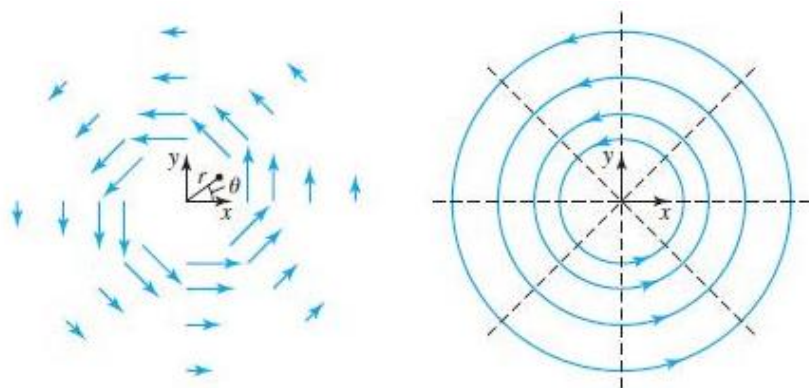
$$\psi = \pm m\theta \quad (۱۸-۶) \quad (\text{علامت (+) برای چشمه و علامت (-) برای چاه})$$

به همین ترتیب تابع پتانسیل چشمه و چاه عبارت است از:

$$\phi = \pm m \ln r \quad (۱۹-۶)$$

### ۳-۲-۶ گرداب آزاد

جریان گرداب آزاد جریانی کاملاً غیر شعاعی و تماماً در جهت  $\theta$  است. این جریان در شکل (۳-۶) نشان داده شده است. بنابراین  $V_r = 0$  و  $V_\theta = f(r)$  است. این جریان با شرط غیر چرخشی بودن در تمام نقاط به غیر از  $r=0$  تعریف می‌شود.



شکل ۳-۶ جریان گرداب آزاد (پاد ساعت گرد).

بنابر تعریف گرداب آزاد چرخش صفر است، یعنی:

$$\zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = 0 \quad (۲۰-۶)$$

به این ترتیب به غیر از نقطه  $r=0$ :

$$r V_\theta = \text{const} \quad (۲۱-۶)$$

با محاسبه‌ی مقدار سیرکولاسیون حول مبدأ مختصات داریم:

$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} r V_\theta d\theta = 2\pi(\text{const}) \Rightarrow \text{const} = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad \text{یا} \quad V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (۲۲-۶)$$

بنابراین:

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{d\psi}{dr} \Rightarrow \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (۲۳-۶)$$

با در نظر گرفتن تعریف  $\phi$ :

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Rightarrow \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (۲۴-۶)$$

به این ترتیب گرداب آزاد جریانی است کاملاً در جهت  $\theta$  و غیرچرخشی به استثنای مبدأ مختصات.

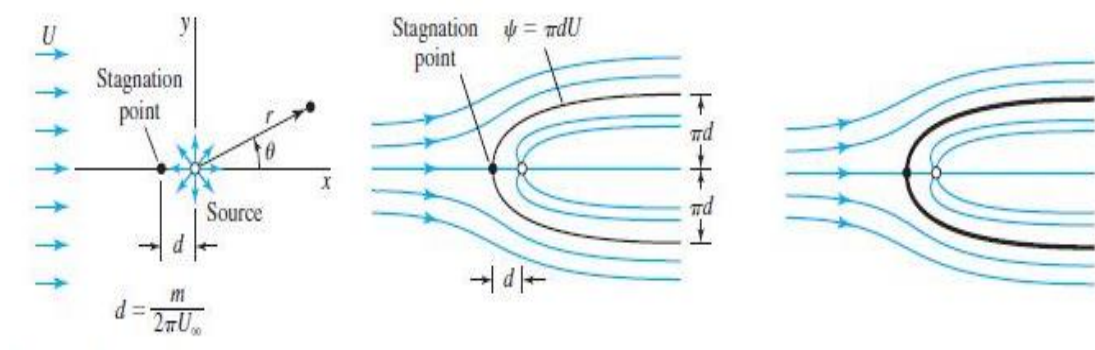
### ۳-۶ ترکیب جریان‌های پایه‌ای

#### ۱-۳-۶ ترکیب جریان یکنواخت و چشمه (نیم بدنه)

همانطور که می‌دانیم ترکیب دو جریان غیرچرخشی، یک جریان غیرچرخشی است. زیرا عملگر لاپلاس یک عملگر خطی است. یکی از ترکیب‌های اولیه و معروف در زمینه‌ی ترکیب جریان‌های پایه، جریان نیم بدنه است. نمایی از این ترکیب در شکل (۴-۶) نشان داده شده است که از ترکیب جریان یکنواخت در امتداد  $x$  و چشمه در مبدأ مختصات حاصل می‌گردد، یعنی:

$$\psi = U_\infty r \sin \theta + m\theta \quad (۲۵-۶)$$

بافرض  $\psi$  به عنوان پارامتر و ترسیم  $r$  برحسب  $\theta$  در  $\psi$  های مختلف شکل زیر حاصل می‌شود.



شکل ۴-۶ جریان نیم بدنه (ترکیب جریان یکنواخت و چشمه).

با تقابل دو جریان یکنواخت و چشمه روی محور  $x$  یک نقطه توقف ( $s$ ) به وجود می‌آید. برای تعیین فاصله‌ی این نقطه از مقادیر سرعت‌ها استفاده می‌شود.

$$U_{\infty} - \frac{m}{d} = 0 \Rightarrow d = \frac{U_{\infty}}{m} \quad \text{در نقطه‌ی } s: \quad (26-6)$$

بنابراین می‌توان با توجه به اینکه نقطه  $s$  روی نیم بدنه‌ی به وجود آمده از جریان قرار دارد، مقدار تابع جریان نیم بدنه را محاسبه نمود:

$$\psi_{body} = U_{\infty} d \sin \pi + m\pi \Rightarrow \psi_{body} = m\pi \quad (27-6)$$

با قرار دادن مقدار تابع جریان  $m\pi$  در معادله‌ی (۲۵-۶) رابطه‌ای بین  $r$  و  $\theta$  برقرار می‌شود، که این رابطه همان معادله خط جریان نیم بدنه می‌باشد.

$$m\pi = U_{\infty} r \sin \theta + m\theta \quad (28-6)$$

$$r = \frac{m(\pi - \theta)}{U_{\infty} \sin \theta} \quad (29-6)$$

با توجه به رابطه‌ی سرعت داریم:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} (U_{\infty} \cos \theta + m) = U_{\infty} \cos \theta + \frac{m}{r} \quad (30-6)$$

$$V_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_{\infty} \sin \theta \quad (31-6)$$

با توجه به اینکه می‌توان از معادله‌ی برنولی بین هر دو نقطه از میدان چرخشی استفاده کرد، لذا با تعریف ضریب فشار و تغییرات ناچیز  $z$  داریم:

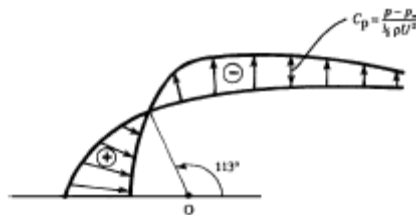
$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} = 1 - \frac{|V|^2}{U_{\infty}^2} \quad (32-6)$$

بنابراین با اعمال روابط (۳۱-۶)، (۳۲-۶)، (۳۰-۶) و همچنین (۲۹-۶) رابطه‌ی ضریب فشار روی بدنه حاصل می‌شود.

$$C_p = -\frac{\sin \theta}{\pi - \theta} \left( \frac{\sin \theta}{\pi - \theta} + 2 \cos \theta \right) \quad (33-6)$$



در نقطه  $s$  مقدار  $C_p = 1$  و در نقطه‌ای که  $C_p = 0$  است یا  $p = p_\infty$ ،  $\theta = 113.3^\circ$  گزارش شده است.



شکل ۵-۶ توزیع فشار بی‌بعد روی نیم بدنه ( $C_p$ ).

همانطور که از شکل ۵-۶ دیده می‌شود  $C_p$  در  $s$  ماکزیمم و برابر ۱ است و در امتداد بدنه به طرف پایین دست جریان در نقطه‌ی  $\theta = 113.3^\circ$  صفر شده، و در جایی به حداقل مقدار منفی خود می‌رسد. در این نقطه سرعت ماکزیمم شده و با کم شدن  $\theta$  روی بدنه (به طرف پایین دست جریان) مجدداً  $C_p$  افزایش یافته و در دوردست، دوباره به صفر میل می‌نماید و فشار با  $p_\infty$  یکی می‌شود. باید توجه داشت که ضخامت جسم محدود بوده و این امر قابل محاسبه و اثبات است:

$$h = r \sin \theta = \frac{m(\pi - \theta)}{U_\infty} \quad (۳۴-۶)$$

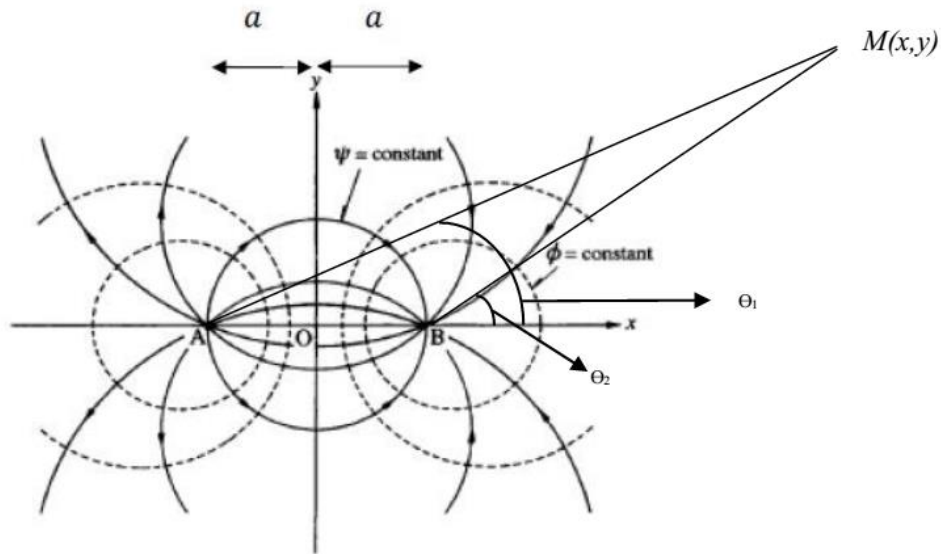
در دوردست که همان  $\theta = 0^\circ$  است، بنابراین:

$$h_{max} = \frac{m\pi}{U_\infty} \quad (۳۵-۶)$$

که این مقدار همان مجانبی است که بدنه در دوردست بدان میل می‌کند. کاملاً واضح شد که از نوک جسم در قسمت همگرا  $C_p$  کم شده یعنی  $\frac{dp}{dx} < 0$  و در محل  $\frac{dp}{dx} = 0$ ،  $C_p$  صفر شده است و پس از آن با تغییر انحنای جسم  $\frac{dp}{dx} > 0$  رخ می‌دهد و در نهایت به حد  $C_p = 0$  می‌رسد.

### ۲-۳-۶ ترکیب چشمه و چاه (دوقطبی)

در این جریان ترکیبی چشمه و چاهی به فاصله‌ی مساوی  $a$  از مبدأ مختصات با قدرت مساوی قرار دارند و خطوط جریان مورد بررسی قرار می‌گیرند. شکل (۶-۶) نشان‌دهنده‌ی خطوط جریان است.



شکل ۶-۶ خطوط جریان چشمه و چاه با قدرت مساوی.

چون چشمه و چاه در مبدا مختصات قرار ندارند، بنابراین برای هر یک زاویه‌ی بردار وضعیت مطابق شکل (۶-۶) تعریف می‌شود و موقعیت آنها نسبت به مبدا نشان داده و سنجیده می‌شود. همانطور که در شکل دیده می‌شود نقطه دلخواه  $M(x, y)$  نسبت به چشمه و چاه و زوایای برداری آنها موقعیت سنجی شده است.

$$\psi = m(\theta_1 - \theta_2) \quad (۳۶-۶)$$

برای ساده کردن این عبارت به سیستم مختصات کارتزین و یا قطبی از روش مثلثاتی استفاده می‌شود:

$$(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\psi}{m} \quad (۳۷-۶)$$

و می‌دانیم:

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \quad (۳۸-۶)$$

از طرفی:

$$\tan \theta_1 = \frac{y}{x+a}, \quad \tan \theta_2 = \frac{y}{x-a} \quad (۳۹-۶)$$

بنابراین:

$$\tan\left(\frac{\psi}{m}\right) = \frac{\frac{y}{x+a} - \frac{y}{x-a}}{1 + \frac{y^2}{x^2 - a^2}} = \frac{-2ya}{x^2 + y^2 + a^2} \quad (۴۰-۶)$$

یا

$$\tan\left(\frac{\psi}{m}\right) = \frac{-2ra \sin \theta}{r^2 + a^2} \quad (۴۱-۶)$$

بنابراین رابطه‌ی چشمه و چاه به صورت زیر قابل بیان است:

$$\psi = \tan^{-1} \frac{-2yma}{x^2 + y^2 + a^2} = \tan^{-1} \frac{-2ra \sin \theta}{r^2 + a^2} \quad (۴۲-۶)$$

خطوط جریان این ترکیب مشابه خطوط میدان مغناطیسی یک آهن‌ربای دوقطبی است، به همین دلیل این ترکیب را دوقطبی نیز می‌نامند. دلیل مشابه بودن این دو میدان آن است که هر دو جواب معادله‌ی لاپلاس با شرایط مرزی مشابهند. بنابراین در واقع به لحاظ پاسخ ریاضی یک جواب محسوب شده و تنها به لحاظ کاربرد فیزیکی در دو نوع فیزیک مختلف رخ داده‌اند. این جریان به خودی خود، کاربردی نداشته و در ترکیب با جریان یکنواخت کاربرد دارد.

### ۳-۳-۶ جریان دو قلو<sup>۱</sup>

این میدان جریان نیز همانند دو قطبی به تنهایی کاربرد فراوانی ندارد و پس از ترکیب با جریان یکنواخت اهمیت می‌یابد. این میدان در واقع یک دوقطبی است که فواصل چشمه و چاه در آن به شرط ثابت ماندن حاصلضرب  $ma$  به صفر میل کند، یعنی:

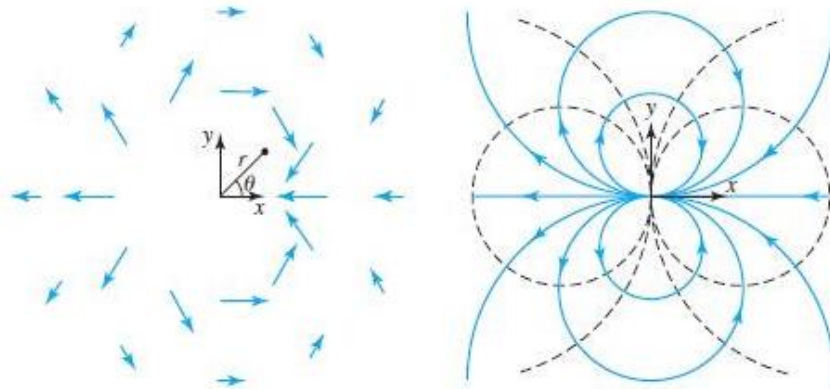
$$\psi_{doublet} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ ma \rightarrow const}} \tan^{-1} \frac{-2ma \sin \theta}{r^2 + a^2} \quad (۴۳-۶)$$

باتوجه به ثابت ماندن  $ma$  و عدد  $(-۲)$  در عبارت  $(۴۳-۶)$ ، مقدار ثابت  $\mu$  برای  $2ma$  می‌شود و در نتیجه تابع جریان دوقلو عبارت است از رابطه‌ی زیر که به دلیل کوچک بودن زوایا در  $a \rightarrow 0$  تانژانت با خود زاویه برابر است، یعنی:

<sup>۱</sup> Doublet

$$\psi = \frac{-\mu \sin \theta}{r} \quad (۴۴-۶)$$

خطوط جریان دوقطبی به دواير مماس در مبدأ مختصات تبدیل می‌شوند. شکل (۷-۶) بیانگر جریان دوقطبی می‌باشد.



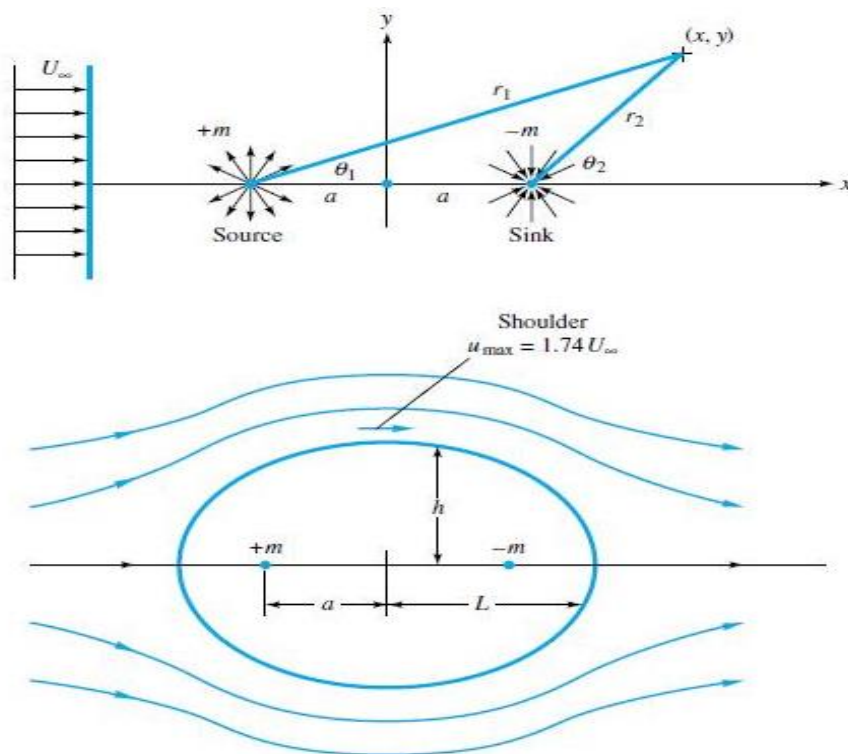
شکل ۷-۶ خطوط جریان دوقطبی.

اگر چشمه و چاه روی محور  $y$  ها انتخاب شود، دواير روی محور  $y$  ها در مبدأ مماس می‌شوند.

#### ۴-۳-۶ ترکیب جریان دوقطبی و جریان یکنواخت (بدنه‌ی رانکین)

مشابه آنچه که درباره‌ی جریان نیم بدنه یافتیم (یعنی خط جریانی به شکل یک جسم) در ترکیب دوقطبی و جریان یکنواخت به دلیل قرار دادن یک چاه، بدنه‌ای بسته مطابق شکل (۸-۶) ایجاد شده است که تابع جریان آن عبارت است از:

$$\psi = U_{\infty} r \sin \theta - \tan^{-1} \frac{2rma \sin \theta}{r^2 + a^2} \quad (۴۵-۶)$$



شکل ۸-۶ جریان بدنه‌ی رانکین.

در تابع جریان بدنه که به بدنه‌ی رانکین معروف است، دو نقطه‌ی توقف دیده می‌شود ( $s_2, s_1$ ). این نقاط توقف تنها در یک جریان غیرچرخشی دیده می‌شود و در جریان حقیقی با رینولدز بالا هرگز خطوط جریان به گونه‌ای نیست که نقطه‌ی  $s_2$  به وجود آید.

همانند آنچه که برای نیم بدنه انجام شد، ابتدا محل  $s_2, s_1$  تعیین می‌شود که همان محل صفر شدن سرعت است، یعنی:

$$0 = -\frac{m}{(\frac{L}{2} - a)} + \frac{m}{(\frac{L}{2} + a)} + U_{\infty} \quad (۴۶-۶)$$

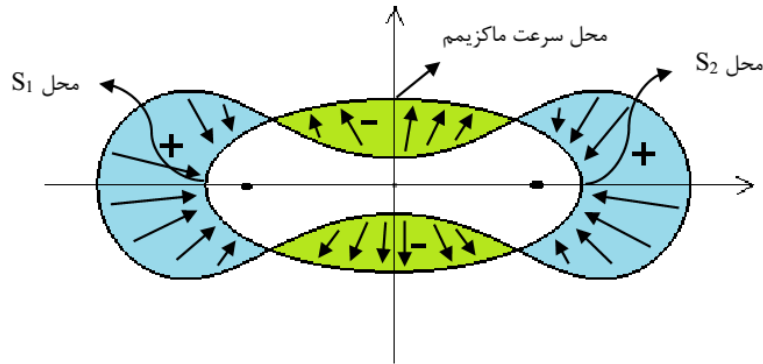
چون  $s_1$  و  $s_2$  در  $y = 0$  رخ می‌دهد، بنابراین تابع جریان بدنه ( $\theta = 0, 2\pi$ )

$$\psi_{body} = 0 \quad (۴۷-۶)$$

یعنی معادله‌ی بدنه عبارت است از:

$$0 = U_{\infty} r \sin \theta - \tan^{-1} \frac{2rmasin \theta}{r^2 + a^2} \quad (۴۸-۶)$$

با قراردادن  $r = \frac{b}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}$  در معادله‌ی (۴۸-۶) مقدار  $\frac{b}{2}$  محاسبه می‌شود. برای محاسبه‌ی توزیع فشار و سرعت از ارایه‌ی ریز محاسبات خودداری شده و دانشجویان به عنوان تمرین می‌توانند معادله‌ی سرعت و توزیع فشار را محاسبه نمایند. اما به صورت کیفی توزیع  $C_p$  به صورت شکل زیر خواهد بود.



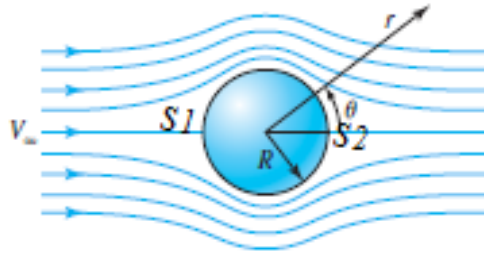
شکل ۹-۶ توزیع فشار روی بدنه‌ی رانکین.

لازم به توجه است که سرعت ماکزیمم در  $\theta = \frac{\pi}{2}$  در جاییکه فشار حداقل است، رخ می‌دهد و فشار حداکثر در نقاط  $S_1$  و  $S_2$  رخ می‌دهد. بنابراین قابل توجه است که از  $S_1$  تا  $\theta = \frac{\pi}{2}$  سرعت رو به افزایش و فشار رو به کاهش است، یعنی  $\frac{dp}{dx} < 0$  و از  $\theta = \frac{\pi}{2}$  به طرف  $S_2$  فشار رو به افزایش است و سرعت رو به کاهش، یعنی  $\frac{dp}{dx} > 0$  می‌باشد. بنابراین اثر انحنای سطح روی توزیع فشار جریان هویدا می‌گردد.

### ۵-۳-۶ جریان حول سیلندر

از ترکیب جریان یکنواخت و دوقلو خط جریانی به شکل دایره به وجود می‌آید که خطوط جریان و میدان حول سیلندر را شبیه‌سازی می‌کند. این جریان در شکل (۱۰-۶) نشان داده شده است. تابع جریان به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\psi = U_{\infty} \left( r - \frac{\mu}{rU_{\infty}} \right) \sin \theta \quad (۴۹-۶)$$



شکل ۶-۱۰ خطوط جریان غیر چرخشی حول سیلندر.

نقاط  $S_1$  و  $S_2$  که همان نقاط سرعت صفر هستند مجدداً آشکار می‌گردد. با محاسبه‌ی سرعت در این نقاط داریم:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = (U_\infty - \frac{\mu}{r^2}) \cos \theta \quad (۵۰-۶)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = (U_\infty + \frac{\mu}{r^2}) \sin \theta \quad (۵۱-۶)$$

چون نقاط  $S_1$  و  $S_2$  در  $\theta = 0, 2\pi$  قرار دارند خود به خود  $V_\theta$  صفر شده ولی باید  $V_r$  برابر صفر شود، یعنی:

$$U_\infty - \frac{\mu}{r^2} = 0 \rightarrow R^2 = r^2 = \frac{\mu}{U_\infty} \quad (۵۲-۶)$$

یعنی  $S_1$  و  $S_2$  روی منحنی قرار دارند که شعاع آن ثابت است و این منحنی دایره است و لذا می‌توان  $\psi$ ،

$V_\theta$  و  $V_r$  را برحسب  $R$  بازنویسی کرد:

$$\psi = U_\infty (r - \frac{R^2}{r}) \sin \theta \quad (۵۳-۶)$$

$$V_r = U_\infty (1 - \frac{R^2}{r^2}) \cos \theta \quad (۵۴-۶)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty (1 + \frac{R^2}{r^2}) \sin \theta \quad (۵۵-۶)$$

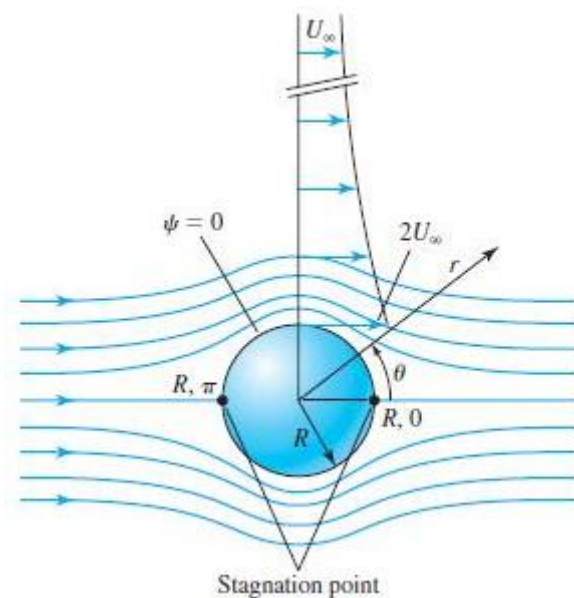
روی سیلندر که  $r = R$  است خواهیم داشت:

$$V_\theta = -2U_\infty \sin \theta \quad , \quad V_r = 0 \quad (۵۶-۶)$$

بنابراین:

$$|V|_{cyl} = 2U_{\infty} \sin \theta \quad (57-6)$$

در شکل (۱۱-۶) مکان و مقدار ماکزیمم سرعت نشان داده شده است.



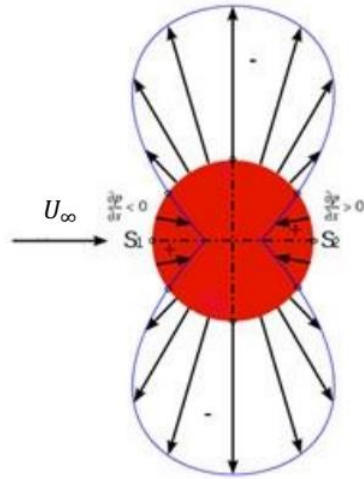
شکل ۱۱-۶ نمایش حداکثر سرعت روی سیلندر و شتاب گرفتن جریان.

با استفاده از مقدار سرعت روی سیلندر و محاسبه  $C_p$  داریم:

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} = 1 - \frac{|V|_{cyl}^2}{U_{\infty}^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (58-6)$$

شکل (۱۲-۶) توزیع فشار روی سیلندر را نمایش می‌دهد.





شکل ۶-۱۲ توزیع فشار حول سیلندر.

براساس این توزیع فشار نیز مشاهده می‌شود که در بخش همگرا  $\frac{dp}{dx} < 0$  و در بخش واگرا  $\frac{dp}{dx} > 0$  است.

### ۶-۳-۶ جریان حول سیلندر با گرداب

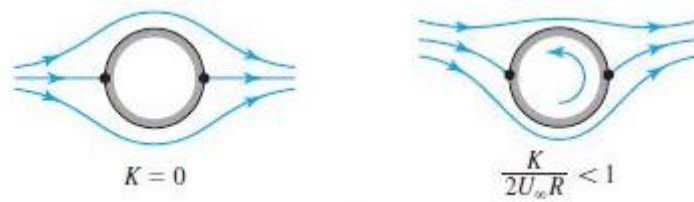
اگر به جریان سیلندر یک گرداب اضافه شود (درجهت پائین دست جریان) تقارن جریان نسبت به محور  $x$  به هم خورده و در نتیجه توزیع فشار نیز متقارن نخواهد بود.

$$\psi = U_\infty \left( r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (۵۹-۶)$$

توزیع سرعت عبارت است از:

$$V_r = U_\infty \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (۶۰-۶)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (۶۱-۶)$$



شکل ۱۳-۶ خطوط جریان حول سیلندر با گرداب آزاد.

نقاط  $s_1$  و  $s_2$  تغییر مکان داده و برای تعیین محل آنها از صفر شدن سرعت استفاده می‌شود.

$$r = R, V_r = 0, V_\theta = -2U_\infty, \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0 \quad (۶۲-۶)$$

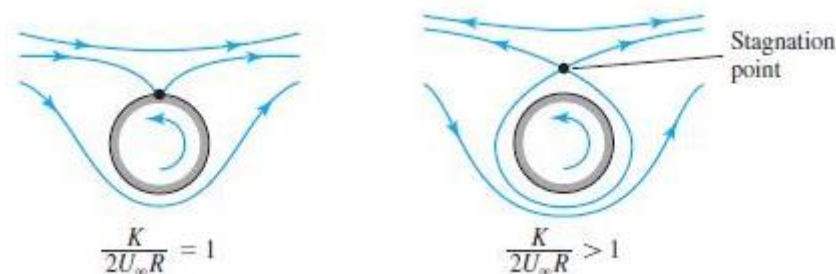
بنابراین:

$$|\sin\theta_s| = \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty R} \quad (۶۳-۶)$$

شکل ۱۳-۶ شرایطی که  $\frac{\Gamma}{4\pi U_\infty R} < 1$  است را نشان می‌دهد. اگر این مقدار بزرگتر از یک باشد، دیگر فقط

توقف روی جسم نخواهد بود و از سیلندر دور می‌شود. شکل ۱۴-۶ در حالات (الف) و (ب) به ترتیب شرایط

$$\frac{\Gamma}{4\pi U_\infty R} = 1 \text{ و } \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty R} > 1 \text{ را نشان می‌دهد.}$$



شکل ۱۴-۶ خطوط جریان حول سیلندر با سیرکولاسیون در شرایط  $\frac{\Gamma}{4\pi U_\infty R} \geq 1$ .

به دلیل عدم تقارن خطوط جریان در سیلندر با گرداب همانطور که در شکل (۱۴-۶) دیده می‌شود، می‌توان

با محاسبه‌ی فشار نیروی  $F_y$  را محاسبه کرد. نیروی  $F_x$  صفر است، زیرا توزیع فشار به دلیل تقارن خطوط

جریان نسبت به محور  $y$  ها متقارن می‌باشد. بنابراین:

$$p_{cyl} - p_{\infty} = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 \left[ 1 - \left( \frac{V_{cyl}}{U_{\infty}} \right)^2 \right] \quad (۶۴-۶)$$

$$p_{cyl} - p_{\infty} = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 (1 - 4 \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi R U_{\infty}} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 U_{\infty}^2}) \quad (۶۵-۶)$$

بنابراین:

$$F_x = -\int_0^{2\pi} p_{cyl} R \cos \theta d\theta = 0, \quad F_y = -\int_0^{2\pi} p_{cyl} R \sin \theta d\theta = 0, \quad (۶۶-۶)$$

لذا:

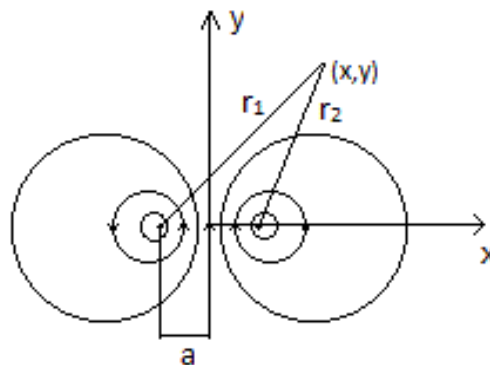
$$F_y = -\rho U_{\infty} \Gamma \quad (۶۷-۶)$$

به نیروی  $F_y$  نیروی برآ می‌گویند. همانطور که دیده می‌شود مقدار نیروی برآ به مقدار گردش گرداب و سرعت جریان آزاد بستگی دارد. سطح سیلندر برای اعمال این نیرو  $A_{cyl} = D \times 1$  در نظر گرفته می‌شود و لذا ضریب برآ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_L = \frac{|F_y|}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 D} = \frac{2\Gamma}{U_{\infty} D}, \quad D = 2R \Rightarrow C_L = \frac{\Gamma}{U_{\infty} R} \quad (۶۸-۶)$$

### ۷-۳-۶ جفت گرداب<sup>۱</sup>

مانند نظام جریان دوقطبی می‌توان دو گرداب آزاد با قدرتهای مساوی را در فاصله‌ی  $a$  از مبدأ با جهت مخالف قرار داد تا شکل زیر و تابع جریان آن حاصل آید. این ترکیب نیز به تنهایی کاربرد وسیعی ندارد.



شکل ۱۵-۶ خطوط جریان جفت گرداب.

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_1 - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_2 = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (۶۹-۶)$$

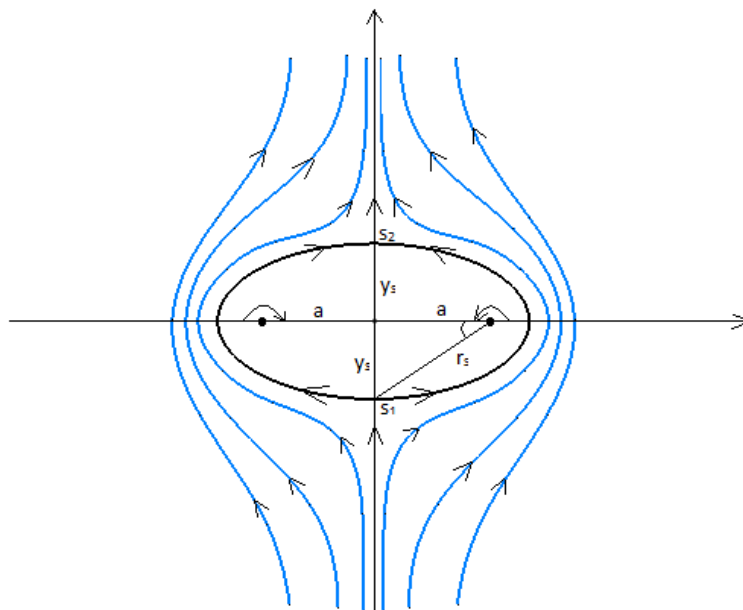
محل سرعت ماکزیمم در این جریان مبدأ مختصات است و در نتیجه کمترین فشار در این محل اتفاق می‌افتد. در نتیجه دو گرداب تمایل به نزدیک شدن به یکدیگر را دارند.

### ۸-۳-۶ ترکیب جریان یکنواخت و جفت گرداب

ترکیب یک جریان یکنواخت عمودی و جفت گرداب مجدداً یک بدنه‌ی بیضی‌گون به وجود می‌آورد که جریان از سمت قطر اصلی آن وارد می‌شود. نمایی شماتیک از ترکیب خطوط جریان ترکیب جریان یکنواخت و جفت گرداب در شکل (۱۶-۶) نشان داده شده است.

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} - U_{\infty} x \quad (۷۰-۶)$$

<sup>1</sup> Vortex pair



شکل ۶-۱۶ خطوط جریان ترکیب جریان یکنواخت و جفت گرداب.

محل  $S_1$  و  $S_2$  در فاصله  $y_s$  از مبدأ با صفر شدن سرعت از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$2\left(\frac{\Gamma}{2\pi r_s}\right) \cos \alpha - U_\infty = 0 \quad (۶-۷۱)$$

$$y_s^2 = \frac{\Gamma a}{\pi U_\infty} - a^2 \quad (۶-۷۲)$$

محل سرعت ماکزیمم در  $\theta = 0, 2\pi$  است. این واقعیت از تراکم خطوط جریان واضح است. معادله‌ی بدنه

نیز از مختصات  $s$  و محاسبه‌ی  $\psi_b = 0$  حاصل می‌آید:

$$x = \frac{\Gamma}{4\pi U_\infty} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \quad (۶-۷۳)$$

برای محاسبه‌ی قطر بزرگ‌تر می‌توان با قراردادن  $x = \frac{L}{2}$ ,  $y = 0$  اندازه‌ی نصف و تمام قطر را به صورت

ضمنی از معادله (۶-۷۴) محاسبه کرد.

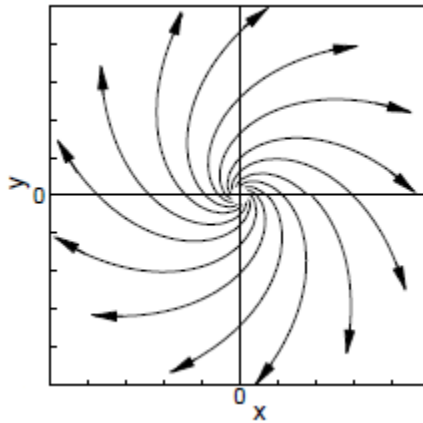
### ۹-۳-۶ ترکیب چشمه (چاه) و گرداب

ترکیب چشمه و گرداب ترکیب جالبی است که می‌تواند مبنای طراحی انحنای توربوماشین‌های گریزازمرکز قرار گیرد و در بین کل خطوط جریان آن، خط جریان  $\psi = 0$  از همه کاراتر به نظر می‌آید و همان بدنه‌ی مورد نظر محسوب می‌شود.

$$\psi = m\theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (۷۴-۶)$$

$$r = e^{\frac{-m\theta}{\Gamma}} \quad (۷۵-۶)$$

شکل خطوط بدنه در شکل ۱۷-۶ دیده می‌شود.



شکل ۱۷-۶ خطوط جریان در ترکیب چشمه و گرداب.

چون در مسیر  $\psi = 0$  سرعت کم و فشار زیاد می‌شود، مسیر را پخش‌کننده می‌نامند.

$$V_r = \frac{m}{r}, V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (۷۶-۶)$$

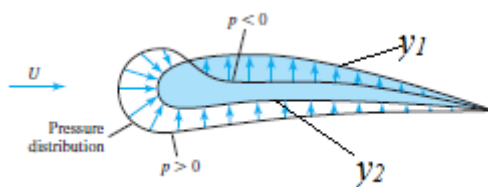
و در ازای  $\Gamma$  ثابت:

$$(rV_\theta)_1 = (rV_\theta)_2 \quad (۷۷-۶)$$

یعنی در گرداب ثابت بقای اندازه حرکت زاویه‌ای در مسیر برقرار است. بنابراین اگر این مسیر، مسیر حرکت سیال در یک پمپ باشد، به دلیل نزدیکی به بقای اندازه حرکت زاویه‌ای حداقل، ممان برای گردش چرخ پمپ مورد نیاز خواهد بود. این شکل در پمپ‌ها و سوپرشاژرها کاربرد دارد.

#### ۴-۶ شرط کاتا برای گرداب ترک جسم

در انتهای این فصل برای رسیدن به نوعی نتیجه‌گیری مشترک از فصول ۵ و ۶ موضوع گرداب ناشی از ترک یک جسم متحرک می‌تواند مفید و کاربردی باشد. همانطور که از جریان حول سیلندر با گرداب دریافتیم، نیروی برآی سیلندر به دلیل وجود گرداب حاصل گردید و مقدار آن با مقدار گرداب ارتباط مستقیم داشت. در مباحث پیشرفته‌تر اثبات می‌شود که می‌توان توسط توابع تحلیلی و نگاشت‌های همدیس از شکل سیلندر به اشکال آیرودینامیکی مثل هواپرها رسید و درواقع جریان حول سیلندر همانند یک جریان عمومی برای تمام اجسام آیرودینامیکی فرض می‌شود. از آنجاییکه یک هواپرا دارای دو منحنی تشکیل دهنده است که می‌توانند با یکدیگر یکسان یا متفاوت باشند، جریان دو طرف هواپرا می‌تواند شکل یکسان یا متفاوت داشته باشد.



شکل ۶-۱۸ منحنی‌های بدنه‌ی یک هواپرا و توزیع فشار روی آن.

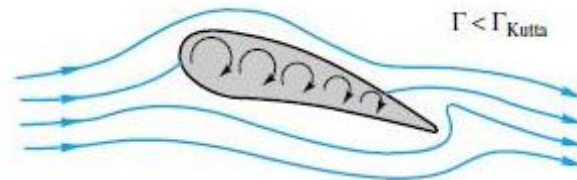
با توجه به شکل (۶-۱۸) اگر دو انحنای  $y_1$  و  $y_2$  اگر یکسان باشند هواپرا را متقارن می‌گویند و توزیع فشار دو طرف آن در صورت موازی بودن جریان با وتر هواپرا یکسان است و لذا هیچ نیرویی بدان وارد نمی‌شود. در ایروفویل‌های غیرمتقارن معمولاً  $y_1$  و  $y_2$  به گونه‌ای طراحی می‌شوند که متوسط فشار طرف  $y_2$  بیشتر از طرف  $y_1$  بوده و نیروی برآ، بر آن ایجاد شود. به همین دلیل طرف  $y_1$  را «سمت مکش» و طرف  $y_2$  را «سمت فشار» می‌نامند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در رینولدزهای بالا و لایه مرزی نازک، تا قبل از ناحیه‌ی جدایی جریان که تابع انحنای سطح است، به دلیل وجود نیروی برآ روی هواپرا براساس آنچه درمورد سیلندر با گرداب دیدیم، یک گرداب در اطراف هواپرا متناسب با مقدار نیروی برآ ایجاد می‌شود.

براساس این استدلال که مبتنی بر:

۱- امکان تبدیل جریان حول سیلندر به جریان حول هواپرا

## ۲- وجود نیروی برآ حول سیلندر با گرداب

حاصل گردید، همواره برای یک هوابر با نیروی برآ، گردابی حول آن ایجاد می‌شود. اما مطالعات فردی به اسم «کاتا»<sup>۱</sup> نشان داد که در صورت تبدیل جریان سیلندر بدون گرداب، شکل جریان غیرچرخشی حول هوابر به شکل زیر در می‌آید.



شکل ۶-۱۹ تبدیل جریان سیلندر بدون گرداب به جریان هوابر.

همانطور که در شکل دیده می‌شود حتی برای یک جریان غیرچرخشی، برگشت در لبه‌ی انتهایی بال در یک نقطه نیاز به انرژی بی‌نهایت داشته و غیرممکن است. بنابراین جریان سیلندر بدون گرداب حتی برای الگوی غیرچرخشی جریان هوابر نیز نامناسب و غیرممکن است. در اینجا با اعمال گرداب حول سیلندر نقاط  $S_1$  و  $S_2$  تغییر مکان داده و تنها در یک گرداب معین که به «گرداب کاتا» معروف است شکل جریان با الگوی غیرچرخشی و جریان واقعی مطابقت دارد. یعنی باید برای رسیدن به جریان غیرچرخشی حول هوابر، گرداب سیلندر برابر گرداب کاتا باشد، یعنی:

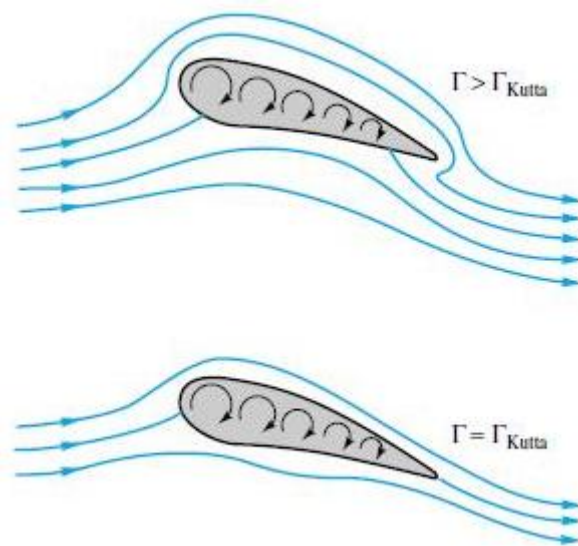
$$\Gamma = \Gamma_{kutta}$$

در شکل زیر حالت های  $\Gamma = \Gamma_{kutta}$  و  $\Gamma > \Gamma_{kutta}$  به صورت شماتیک ترسیم شده و شکل ۶-۱۹ در واقع

حالت  $\Gamma < \Gamma_{kutta}$  محسوب می‌شود.

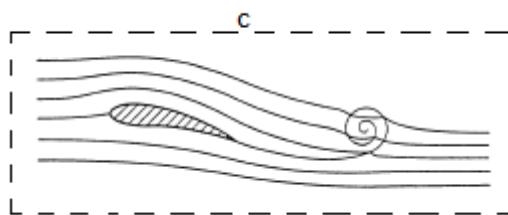
<sup>1</sup> Kutta





شکل ۶-۲۰ شکل جریان غیر چرخشی حول هواپر (شرط کاتا).

ازطرفی اگر حول یک محدوده‌ی بزرگ از یک سیال ساکن که در آن هوابری عبور می‌کند، مانند شکل (۶-۲۱)، در صورتیکه حول  $C$  مقدار گردش محاسبه گردد، چون سیال ساکن است مقدار کل گردش صفر است و از طرفی چون حول هواپر مقدار  $\Gamma_{kutta}$  وجود دارد، بنابراین پس از عبور هواپر یک گردش مخالف وجود خواهد داشت که به آن «گرداب ترک» می‌گویند و با گذشت زمان به دلیل وجود لزجت ساکن و محو می‌گردد.



شکل ۶-۲۱ گرداب ترک یک هواپر.

## مسائل فصل ششم

۱-۶ ترکیب جریان یکنواخت و یک گرداب مثبت را مطالعه و خطوط جریان را رسم کنید.

$$(\text{جواب: } \psi = U_{\infty} r \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r)$$

۲-۶ ثابت کنید منحنی‌های  $\psi$  و  $\phi$  در یک میدان غیرچرخشی عمود بر یکدیگرند.

۳-۶ ثابت کنید اگر  $\psi$  و  $\phi$  به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی یک تابع مختلط باشند،  $\psi$  و  $\phi$

در شرط کشی-ریمان صادق‌اند و تابع حاصل یک تابع تحلیلی است.

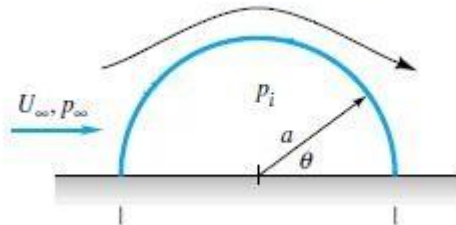
۴-۶ تابع جریان یک جریان یکسو با زاویه  $\alpha$  نسبت به محور  $x$  ها را بدست آورید.

۵-۶ با استفاده از ترکیب یک جریان یکسو با زاویه  $\alpha$  و یک دوقلو جریان حاصل را رسم کنید.

۶-۶ برای مسئله ۵-۶ توزیع فشار را روی جسم محاسبه و نیروهای  $F_x$  و  $F_y$  وارد بر آن را محاسبه کنید.

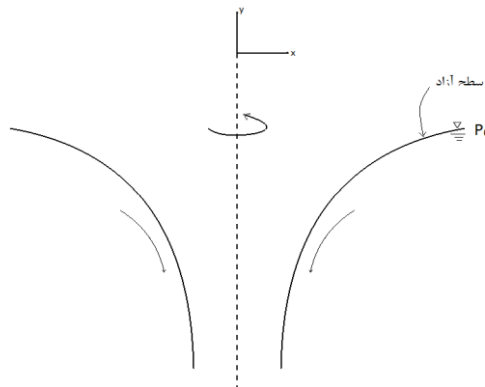
۷-۶ در کمپ صحرایی به شکل نیم‌دایره که فشار داخل  $p_i$  است جریان باد با سرعت  $U_{\infty}$  و فشار  $p_{\infty}$

می‌وزد. نیروی عمودی در واحد عمق وارد بر پایه کمپ را محاسبه کنید.

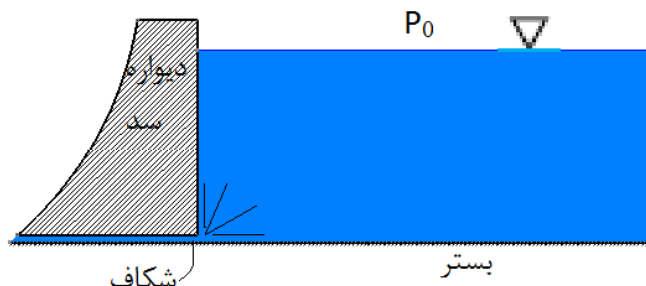


۸-۶ مقطع گرداب جریان عبوری از یک سینک ظرفشویی با فرض غیرچرخشی بودن میدان به شکل زیر

است. تابع انحنای سطح را محاسبه کنید.

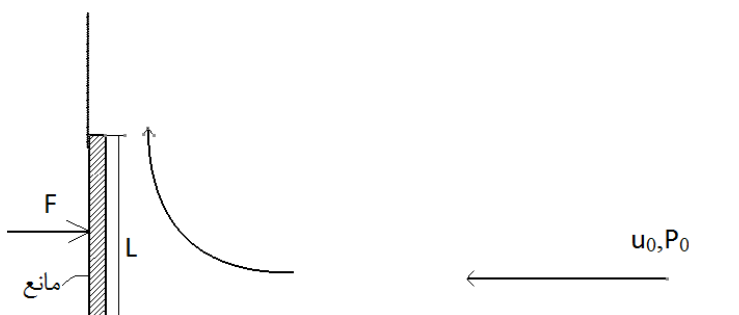


۹-۶ درپایه‌ی یک سد شکافی پدید آورده و نشتی آن همانند یک چاه عمل می‌کند. نیروی وارد بر دیواره‌ی سد بر اثر این نشتی را محاسبه کنید.

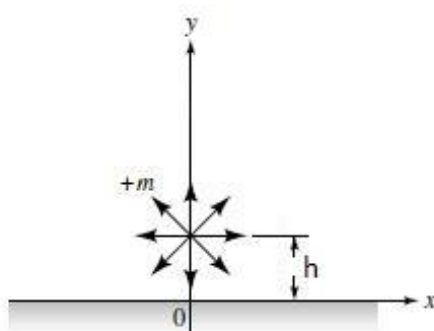


۱۰-۶ تابع تحلیلی حاصل از یک جریان یکسو موازی محور  $x$  ها به صورت  $f(z) = U_\infty z$  محاسبه می‌شود. تابع تحلیلی جریان مسئله ۴-۶ را محاسبه نمایید.

۱۱-۶ در هنگام عبور یک جریان از یک کانال مانعی بر سر راه جریان قرار گرفته و جریان ۹۰ درجه منحرف و به سمت دیگر هدایت می‌شود. نیروی لازم برای ثابت نگهداشتن مانع را برای فرض غیرچرخشی محاسبه نمایید.



۱۲-۶ یک چشمه در فاصله  $h$  از یک دیواره قرار گرفته است. توزیع فشار حاصل از این چشمه روی دیواره را محاسبه کنید.



# فصل هفتم

## جریان در کانال‌های باز

## ۱-۷ مقدمه

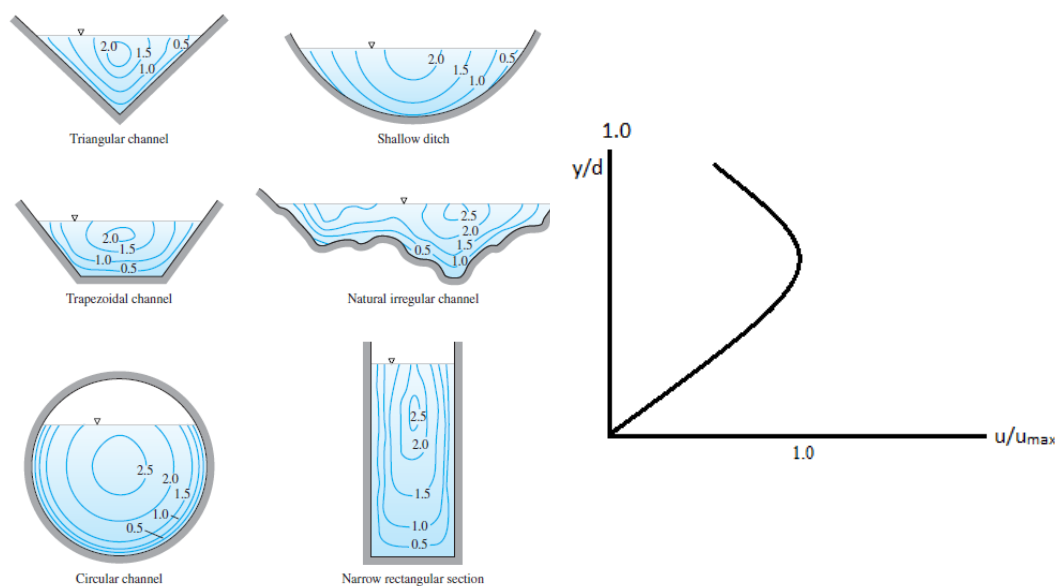
هرگاه مرزی از جریان در مجاورت جو قرار گیرد و امکان تولید امواج گرانشی و اثرات کشش سطحی وجود داشته باشد، جریان را از نوع سطح آزاد می‌نامند و تنش برشی روی مرز مورد نظر صفر است. اما همانطور که گفته شد، انحنای سطح به دلیل امکان عبور امواج گرانشی می‌تواند متغیر باشد و در واقع مرز سطح آزاد و انحنای آن به نوعی خود، تابع میدان سرعت جریان است. بنابراین سطح آزاد مسئله‌ی ساده‌ای نبوده و از جمله مسائل پیچیده‌ی سیالاتی محسوب می‌شود و همواره از مباحث تحقیقاتی متخصصان می‌باشد.

حل معادلات ناویر-استوکس با مرز یاد شده نیازمند روش‌های عددی پیشرفته‌ای است که در این کتاب قصد ارایه و بحث آن‌ها وجود ندارد.

در این بخش به نتایج حاصل از تجربیات و روابط حاصل از آن برای یکی از شاخه‌های جریان سطح آزاد، یعنی کانال‌های باز در شرایط پایا پرداخته می‌شود. از آنجاییکه جریان کانال‌های باز در شبکه‌های انتقال آب از سدها به طرف مراکز مصرف مثل زمین‌های کشاورزی و غیره کاربرد فراوان دارد و همچنین این شاخه در جریان خطوط فاضلاب نیز مبنای محاسبات طراحی قرار می‌گیرد، به ارایه روابط لازم و مبانی طراحی کانال‌های باز بسنده می‌شود.

## ۲-۷ پروفیل سرعت در یک کانال

در مطالعات انجام شده درمی‌یابیم که به دلیل اثرات سطح آزاد در یک کانال و همچنین اثرات مضاعف اصطکاک جداره‌های تر شده کانال، ماکزیمم سرعت برخلاف انتظار روی سطح آزاد نبوده و به شکل تقریبی زیر است. (شکل ۱-۷)



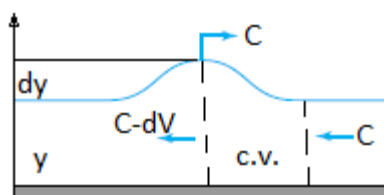
شکل ۷-۱ سرعت در یک کانال باز.

سطح جریان کانال به دلیل اثرات کشش سطحی، تراز نمی‌باشد و البته این شرایط زمانی است که امواج گرانشی در امتداد پایین دست در حال عبور نباشند. بدیهی است عبور این امواج باعث ناپایا شدن سرعت در مجاورت سطح آزاد خواهد شد. بررسی رژیم آرام و آشفته این گونه جریان‌ها نیز از مباحثی است که مبانی آن همانی است که در فصول گذشته ارایه شد. لازم به ذکر است که مدل‌های آشفته‌ی این جریان‌ها در مواردی کاملاً متفاوت از جریان‌های لایه مرزی و یا داخل مجاری است.

### ۷-۳ محاسبه‌ی سرعت موج گرانشی

موج گرانشی با سرعت محدودی در جریان‌های سطح آزاد منتشر می‌شود و این آزادی سطح است که امکان چنین رخدادی را فراهم می‌سازد. در اینجا موضوع بررسی این امواج عرضی و دلایل تولید آن نیست، بلکه تنها توجه به این نکته که تغییراتی که در بالادست و پایین‌دست جریان یک کانال باز بدان اعمال می‌گردد، به صورت یک موج عرضی متجلی می‌شود. هر نوع تغییر در مرزهای یاد شده در واقع به صورت یک اختلاف انرژی ظاهر شده و امواج عرضی گرانشی وظیفه‌ی انتقال این تغییرات را به عهده دارند. بنابراین می‌توان به تعبیری این امواج را در کانال‌های باز (جریان‌های

سطح آزاد) عامل تبادل اطلاعات شرط‌های مرزی دانست. برای محاسبه‌ی سرعت این امواج می‌توان از شکل ۲-۷ استفاده کرد.



شکل ۲-۷ بررسی موج عرضی روی یک حجم کنترل.

سرعت موج را  $C$  در نظر گرفته و چون حجم کنترل ثابت در نظر گرفته می‌شود، سیال نسبت به حجم کنترل از سمت راست با سرعت  $C$  وارد شده و به دلیل آن، بخشی از سیال که موج از آن عبور کرده دچار تغییر سرعت  $\Delta V$  می‌شود. سرعت سیال خروجی از حجم کنترل  $C - \Delta V$  محاسبه می‌شود. بنابراین طبق معادله‌ی پیوستگی:

$$Cy = (C - \Delta V)(y + \Delta y) \quad (۱-۷)$$

و در نتیجه:

$$\Delta V = C\Delta y / (y + \Delta y) \quad (۲-۷)$$

با صرف نظر کردن از اصطکاک کف و با در نظر گرفتن تغییرات هیدرواستاتیکی در راستای  $y$  معادله-ی فوق در راستای انتشار موج عبارت است از:

$$-(\gamma y/2)y + (\gamma (y + \Delta y)/2)(y + \Delta y) = \rho C^2 y - \rho Cy(C - \Delta V) \quad (۳-۷)$$

بنابراین:

$$\gamma y \Delta y + \gamma/2 (\Delta y)^2 = \rho Cy \Delta \gamma$$

با اعمال معادله‌ی پیوستگی داریم:

$$g(y \Delta y + (\Delta y)^2/2) = (C^2 y \Delta y)/(y + \Delta y)$$

$$g(y + \Delta y/2)(y + \Delta y) = C^2 y$$

$$C = \sqrt{gy} (1 + 3/2 \Delta y/y)^{(1/2)} \approx \sqrt{gy} (1 + 3/4 \Delta y/y) \quad (4-7)$$

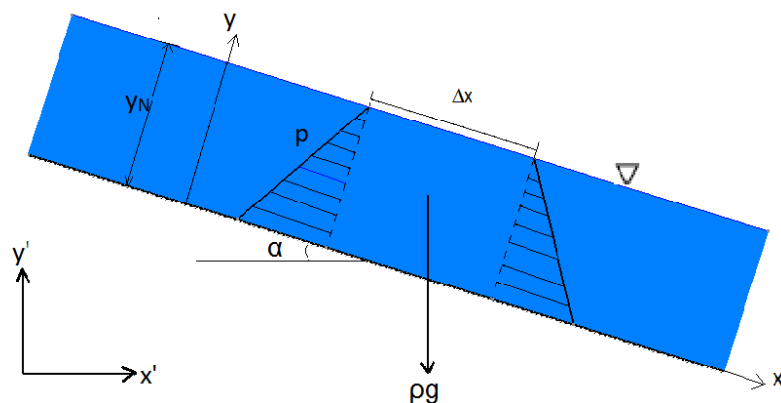
با در نظر گرفتن  $\Delta y/y$ :

$$C = \sqrt{gy}$$

نکته‌ی بسیار مهم این محاسبات این است که طول موج گرانشی را بسیار بزرگتر از عمق جریان در نظر گرفته‌ایم تا بتوان معادلات را به فرمی که ارایه شده استفاده نمود.

#### ۴-۷ محاسبه‌ی دبی در یک کانال باز

برای محاسبه‌ی دبی در یک کانال باز، به مقطع طولی یک کانال که در شکل ۳-۷ به همراه یک حجم کنترل نمایش داده شده توجه کنید.  $A$  به عنوان سطح مقطع جریان و  $P$  محیط تر شده‌ی مقطع کانال فرض می‌شود.



شکل ۳-۷ حجم کنترل جریان پایای یک کانال باز.

چون جریان پایاست، بنابراین به دلیل ثابت ماندن فشار (به دلیل مجاورت با اتمسفر) تنها دو نیروی اصطکاک و ثقل (عامل حرکت) باقی مانده و در شرایط پایا یکدیگر را خنثی می‌کنند، یعنی:

$$\rho g A \Delta x \sin \alpha = \Delta x \int_0^P \tau_w dP \quad (5-7)$$

با تعریف شعاع هیدرولیکی به صورت:

$$R_H = A/P \quad (6-7)$$



رابطه‌ی (۷-۵) به صورت زیر با فرض ثابت ماندن  $\tau_w$ ، روی محیط تر شده بازنویسی می‌شود.

$$\rho g R_H \sin \alpha = \tau_w \quad (7-7)$$

با یادآوری رابطه‌ی «دارسی- وایزباخ» از محاسبات لوله کشی و با توجه به اینکه  $R_H = D/4$  است، و همچنین اینکه  $\tau_w$  همان عامل افت انرژی در جریان است، عملاً شیب جریان افت در واحد طول کانال محسوب می‌گردد، لذا:

$$\tau_w = \frac{f}{4} \rho V^2 / 2 \quad (8-7)$$

با قراردادن رابطه‌ی (۸-۷) در (۷-۷) و محاسبه‌ی سرعت داریم:

$$V = \left( \frac{\rho g}{f} \right)^{(1/2)} (R_H \sin \alpha)^{(1/2)} \quad (9-7)$$

برای اعداد رینولدز بزرگ و ضریب زبری‌های بالا، ضریب اصطکاک  $f$  مستقل از عدد رینولدز است. این حالت به طور معمول در جریان کانال‌های باز وجود دارد. با فرض ضریب زبری به صورت زیر:

$$\left( \frac{\rho g}{f} \right)^{(1/2)} = C \quad (10-7)$$

داریم:

رابطه‌ی چزی<sup>۱</sup>

$$V = C \sqrt{R_H S_0} \quad , \quad S_0 = \sin \alpha \quad (11-7)$$

برای  $C$  رابطه‌ای توسط مانینگ در دو سیستم SI و انگلیسی پیشنهاد شده است:

$$C = \frac{1.486}{n} (R_H)^{(1/6)} \quad \text{سیستم انگلیسی} \quad (12-7)$$

$$C = \frac{1.00}{n} (R_H)^{(1/6)} \quad \text{سیستم SI} \quad (13-7)$$

معروف به ضریب مانینگ<sup>۲</sup> است و به جنس کانال بستگی دارد. مقادیر مختلف  $n$  برای برخی مصالح

---

<sup>۱</sup> Chezy  
<sup>۲</sup> Manning

مختلف (دیواره‌های مختلف) کانال در جدول ۷-۱ ارزیابی شده است. با استفاده از رابطه‌ی مانینگ:

$$V = \left(\frac{k}{n}\right) R_H^{\frac{3}{2}} \sqrt{S_0} \quad (7-14)$$

$$Q = \left(\frac{k}{n}\right) R_H^{\frac{3}{2}} \sqrt{S_0} A \quad (7-15)$$

که  $k$  همان مقدار ثابت رابطه‌ی مانینگ است که بستگی به سیستم ابعادی دارد.

جدول (۷-۱) ضریب مانینگ مصالح مختلف.

جنس دیواره	ضریب مانینگ (n)
چوب صاف	۰/۰۱۲
چوب ناصاف	۰/۰۱۳
بتن صاف	۰/۰۱۲
بتن ناصاف	۰/۰۱۴
چدن	۰/۰۱۵
آجر	۰/۰۱۶
ورق فولادی پرچ شده	۰/۰۱۸
قلوه سنگ	۰/۰۲۵
ورق کرکره‌ای	۰/۰۲۲
زمین رسی کوبیده	۰/۰۲۵
زمین ناصاف با علف هرز و سنگ	۰/۰۳۵
بستر شنی	۰/۰۲۹

یکی از معیارهای دیگر استفاده از روابط تجربی  $f$  در روابط محاسبه‌ی دبی کانال باز عدد  $\frac{V^* e}{\nu}$

می‌باشد که در این تعریف  $V$  برابر  $\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$  (سرعت اصطکاکی) و  $e$  ضخامت زبری سطح است.

بر این اساس محدوده‌های زیر برای جریان تعریف می‌شود:

$$\frac{(V^* e)}{\nu} < 4 \quad (7-16) \text{ روابط جداره‌ی صاف}$$

$$4 < \frac{(V^* e)}{\nu} < 100 \quad (7-17) \text{ روابط گذر از جداره‌ی صاف به زبر}$$

$$100 < \frac{(V^* e)}{\nu} \quad (7-18) \text{ روابط جداره‌ی زبر}$$

باتوجه به اینکه عدد رینولدز براساس قطر هیدرولیکی  $D_H$  تعریف می‌شود، روابط تجربی  $f$  عبارت است از:

$$f = \frac{0.316}{(\text{Re}_{D_H})} \quad (7-19) \text{ (جریان جداره‌ی صاف } \text{Re}_{D_H} < 10^5 \text{)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log\left(\frac{\text{Re}_{D_H} \sqrt{f}}{2.51}\right) \quad (7-20) \text{ (جریان جداره‌ی صاف } \text{Re}_{D_H} > 10^5 \text{)}$$

یا

$$C = 4\sqrt{2} \log\left(\frac{\text{Re}_{D_H} \sqrt{8g}}{2.51C}\right) \quad (7-21) \text{ (جریان جداره‌ی صاف } \text{Re}_{D_H} < 10^5 \text{)}$$

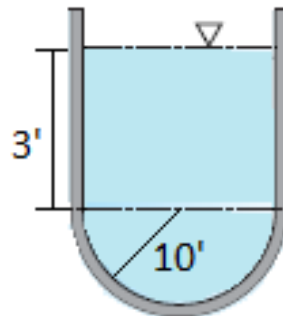
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.16 - 2 \log\left[\frac{e}{R_H} + \left(\frac{30}{\text{Re}_{D_H} \sqrt{f}}\right)\right] \quad (7-22) \text{ (جریان گذر از صاف به زبر)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.16 - 2 \log\left(\frac{e}{R_H}\right) \quad (7-23) \text{ (جریان جداره‌ی زبر)}$$

مثال ۷-۱ در یک کانال نیم دایره‌ای بتونی مطابق شکل با شیب برابر ۰.۰۱۶، آب با دمای  $60^\circ\text{F}$

درجریان است. اگر دیواره‌ی بتونی صاف باشد، مقدار دبی  $Q$  را محاسبه کنید.

حل:



$$R_H = \frac{A}{P} = \frac{\frac{1}{2}\pi \times 10^2 + 3 \times 20}{\frac{1}{2}\pi \times 20 + 2 \times 3} = 5.8 \text{ ft}$$

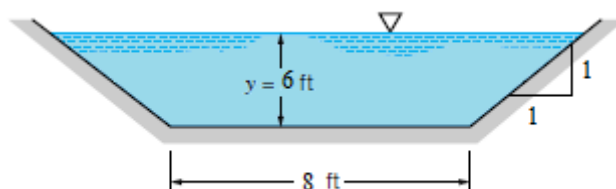
برای  $n = 0.012$  از جدول (۷-۱)، سرعت میانگین عبارت است از:

$$V = \frac{1.486}{n} R_H^{\frac{2}{3}} \sqrt{s} = \frac{1.486}{0.012} \times (5.8) \times \sqrt{0.0016} = 16 \frac{\text{ft}}{\text{sec}}$$

و در نتیجه:

$$Q = V.A = 16 \times \left( \frac{1}{2}\pi \times 10^2 + 3 \times 20 \right) = 3471 \frac{\text{ft}^3}{\text{sec}}$$

**مثال ۷-۲** برای جریان پایای آب در کانال دوزنقه‌ای با شیب کف ۰/۰۰۰۹ و شیب جانبی ۱ به ۱ و قاعده‌ی ۸ فوت و عمق جریان ۶ فوت، دبی جریان را محاسبه کنید. ضریب مانینگ جداره را ۰/۰۲۵ در نظر بگیرید.



حل:

$$A = 8 \times 6 + 6 \times 6 = 84 \text{ ft}^2$$

$$P = 8 + 2 \times 6\sqrt{2} \cong 25 \text{ ft}$$

$$Q = \frac{1.486}{0.025} \times 84 \times \left(\frac{84}{25}\right)^{\frac{2}{3}} \times (0.0009)^{\frac{1}{2}} = 337.44 \frac{\text{ft}^3}{\text{sec}}$$

مثال ۳-۷ چه عمقی برای شدت جریان  $4 \frac{\text{ft}^3}{\text{sec}}$  در یک کانال از جنس چوب صاف با سطح مقطع مربع به ضلع  $2m$  و با شیب کف  $0.002$  لازم است؟

حل:

$$A = 2y, \quad P = 2 + 2y, \quad n = 0.012$$

$$4 = \frac{1.00}{0.012} \times 2y \times \left(\frac{2y}{2 + 2y}\right)^{\frac{2}{3}} \times 0.002^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = 0.89 \text{ m}$$

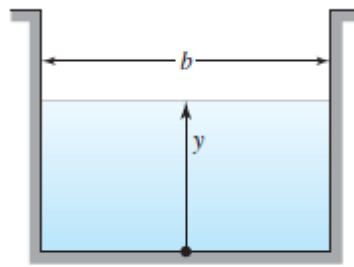
#### ۵-۷ بهترین مقطع یک کانال

یکی دیگر از مباحث طراحی کانال‌های باز برای آبرسانی، تعیین بهترین ابعاد از یک مقطع انتخاب شده است. به عبارتی بهترین مقطع کانال آن است که حداقل محیط تر شده را داشته باشد. زیرا کاهش محیط تر شده منجر به مصرف حداقل مصالح لازم برای ساخت کانال می‌گردد. بر این اساس با توجه به رابطه بین  $S$ ،  $n$  و  $Q$  می‌توان رابطه‌ی زیر را بین  $A$  و  $P$  نوشت:

$$A = CP^{\frac{2}{5}} \quad (۲۴-۷)$$

مقدار  $C$  شامل تمام مقادیر ثابت فرض شده رابطه‌ی مانینگ است، معادله‌ی فوق نشان می‌دهد وقتی  $P$  کمینه است  $A$  نیز کمینه می‌گردد.

### ۱-۵-۷ بهترین مقطع یک کانال مستطیلی



Rectangular

برای سطح مقطع مستطیلی یک کانال روابط هندسی زیر برقرار است:

$$P = b + 2y, \quad A = by$$

و براساس رابطه‌ی (۷-۲۴) داریم:

$$A = (P - 2y)y = CP^{\frac{2}{5}}$$

با مشتق‌گیری از این رابطه (از  $P$  برحسب  $y$ ) داریم:

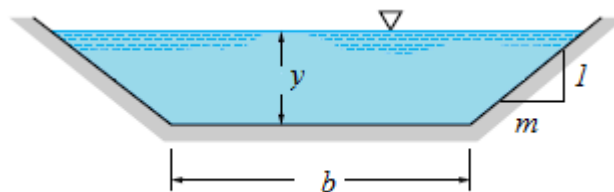
$$\left(\frac{dP}{dy} - 2\right)y + P - 2y = \frac{2}{5} \left(CP^{\frac{-3}{5}} \frac{dP}{dy}\right)$$

و با صفر قرار دادن  $\frac{dP}{dy}$  داریم:

$$P = 4y, \quad b = 2y$$

بنابراین در شرایطی که عمق جریان نصف عرض کانال مستطیلی باشد به ازای دبی مشخص، حداقل مصالح مصرفی را خواهیم داشت.

### ۲-۵-۷ بهترین مقطع یک کانال ذوزنقه‌ای



مشابه آنچه درباره مستطیل ارایه شده در اینجا عمل می‌شود اما باید توجه نمود که در این مسئله هر دو پارامتر  $b$  و  $m$  دخیل بوده و مسیر کمینه‌یابی همان مسیر کلاسیک بهینه-بهینه می‌باشد. یعنی ابتدا نسبت به یک پارامتر بهینه‌سازی نموده و سپس از مسیر این بهینه نسبت به پارامتر بعدی کمینه پیدا می‌شود. این روش عمومیت دارد، اما روش‌های متعدد دیگری نیز در مباحث بهینه‌سازی مطرح است که مجال ارایه در این کتاب وجود ندارد. بنابراین:

$$P = b + 2y\sqrt{1+m^2} \quad , \quad A = by + my^2$$

در نتیجه:

$$A = (P - 2y\sqrt{1+m^2})y + my^2 = CP^{\frac{2}{5}}$$

با مشتق‌گیری  $P$  نسبت به  $y$  و صفر شدن  $\frac{dP}{dy}$  داریم:

$$P = 4y\sqrt{1+m^2} - 2my$$

با مشتق‌گیری مجدد این رابطه نسبت به  $m$  و قراردادن  $\frac{dP}{dy}$  برابر صفر داریم:

$$\frac{2m}{\sqrt{1+m^2}} = 1 \rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین مقطع بهینه عبارت است از:

$$P = 2\sqrt{3}y \quad , \quad b = 2\frac{\sqrt{3}}{3}y \quad , \quad A = \sqrt{3}y^2$$

## ۶-۷ پرش هیدرولیکی<sup>۱</sup>

قبل از تعریف و تشریح پدیده‌ی پرش هیدرولیکی، ابتدا باید با دسته‌بندی جریان‌های سطح آزاد از نقطه نظر سرعت جریان و مقایسه‌ی آن با سرعت موج گرانشی قابل عبور از آن آشنا شد. همانطور که اشاره شد، انتقال اطلاعات مرزی جریان به محمل موج گرانشی و یا به تعبیری به صورت یک موج گرانشی در امتداد مسیر جریان منتشر می‌شود. بنابراین به دلیل محدود بودن این سرعت و

---

<sup>1</sup> Hydraulic Jump

قابل مقایسه بودن آن با سرعت سیال، می‌توان دسته‌بندی‌های زیر را برای یک جریان سطح آزاد تعریف نمود:

۱- جریان ملایم      ۲- جریان سریع      ۳- جریان بحرانی

معیار دسته‌بندی فوق عدد فرود ( $Fr$ ) می‌باشد که در واقع نسبت سرعت سیال به سرعت موج گرانشی قابل عبور از آن است، یعنی:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gy}} \quad (۷-۲۵)$$

براساس مقدار  $Fr$  نسبت به عدد ۱ می‌توان مجدداً دسته‌بندی فوق را بازنویسی نمود:

- جریان بحرانی  $Fr = 1$

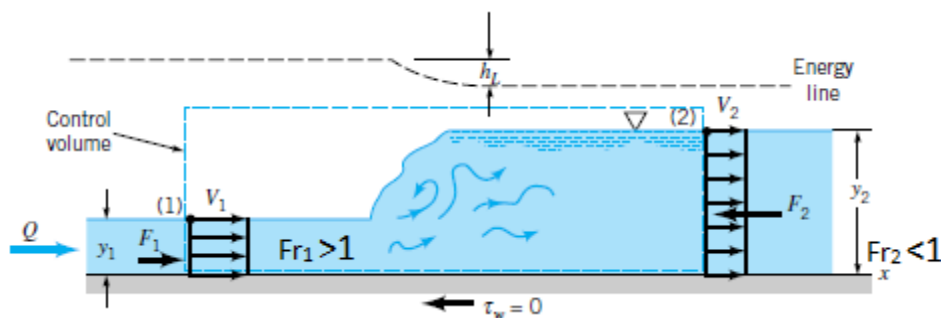
- جریان ملایم  $Fr < 1$

- جریان سریع  $Fr > 1$

بنابراین در یک جریان ملایم، جریان سیال از موج گرانشی خود عقب‌تر بوده و اطلاعات قبل از سیال به مرزها می‌رسد. این موضوع در جریان سریع معکوس بوده و سیال قبل از آنکه اطلاعات یا به عبارتی تغییر شرایط مرزی به بالادست برسد، حرکت کرده و در محلی، در میانه‌ی راه، به موج گرانشی اطلاعات خواهد رسید.

پدیده‌ی پرش هیدرولیکی نیز در یک جریان سریع مشاهده می‌شود. این پدیده معمولاً به دلیل وقوع شرایط جدید مرزی که اساساً از نوع یک مانع یا هر نوع سدکننده جریان است، حاصل می‌شود، به عبارتی حضور مانع در پایین دست جریان با سرعت یک موج گرانشی به بالادست منتقل شده، اما قبل از رسیدن اطلاعات جریان سیال از بالادست در میانه راه بدان رسیده و ناگهان واکنش تنظیم سرعت و ارتفاع از خود آشکار می‌سازد. این واکنش پرش هیدرولیکی نامیده می‌شود.





شکل ۴-۷ نمایش نمادین پرش هیدرولیکی.

بنابر توجیه کیفی رخداد پرش هیدرولیکی، نمی‌توان انتظار پرش هیدرولیکی را از جریان ملایم داشت، زیرا قبل از حرکت سیال از بالادست، موج حضور مانع رسیده و جریان از ابتدای مسیر خود را با سرعت کاسته شده و در نتیجه عمق جدید تنظیم می‌نماید. همانطور که از قانون بقای جرم و پیوستگی می‌توان نتیجه گرفت کاهش سرعت موجب افزایش عمق می‌گردد، زیرا:

$$q = Vy \quad (۲۶-۷)$$

روابط تحلیلی نیز بر پرش هیدرولیکی حاکم است که می‌توان به شرح زیر اثبات نمود. با استفاده از شکل (۴-۷) می‌توان از معادلات پیوستگی و ممنتوم نتیجه گرفت:

$$V_1 y_1 = V_2 y_2 = q \quad (۲۷-۷)$$

$$p_1 - p_2 = \rho q (V_2 - V_1) \quad (۲۸-۷)$$

از آنجاییکه فشار در جریان سطح آزاد به صورت هیدرواستاتیکی تغییر می‌کند می‌توان معادله‌ی (۲۷-۷) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\gamma y_1^2}{2} - \frac{\gamma y_2^2}{2} = \rho \gamma_2^2 y_2 - \rho \gamma_1^2 y_1 \quad (۲۹-۷)$$

این معادله به شکل زیر قابل مرتب شدن است:

$$\frac{\gamma y_1^2}{2} + \rho \gamma_1^2 y_1 = \frac{\gamma y_2^2}{2} + \rho \gamma_2^2 y_2 \quad (۳۰-۷)$$

رابطه‌ی (۷-۲۹) بیانگر این واقعیت است که جمع نیروی فشار و ممنتوم در خلال پرش ثابت می‌ماند.

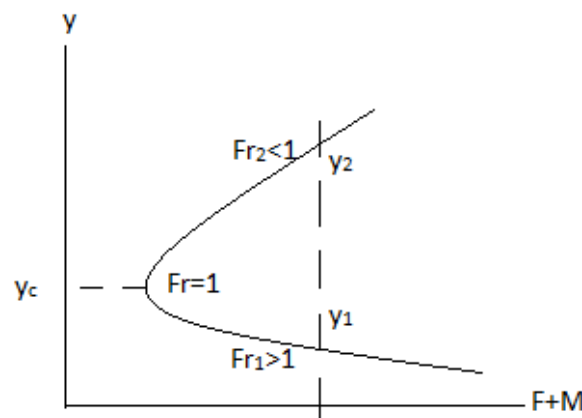
یعنی اگر  $F = \frac{\gamma y^2}{2}$  ،  $M = \rho V^2$  فرض می‌شود:

$$F_1 + M_1 = F_2 + M_2 \quad (۷-۳۱)$$

بنابراین برای یک جریان با دبی حجمی در واحد عمق  $q$  داریم:

$$F + M = \frac{\gamma y^2}{2} + \frac{\rho q^2}{\gamma} \quad (۷-۳۲)$$

باترسیم  $y$  بر حسب  $F+M$  (شکل ۷-۵) نکات مهم پرش آشکارتر می‌شود.



شکل ۷-۵ تغییرات عمق جریان سطح آزاد بر حسب مجموع نیروهای هیدرواستاتیکی و اینرسی.

به وضوح در شکل (۷-۵) دیده می‌شود که مقدار مشخصی از  $F+M$  در دو عمق محتمل است که عمق کمتر مربوط به جریان سریع (براساس پیوستگی) و عمق بیشتر مربوط به جریان ملایم است.

در این شکل یک عمق کمینه نیز دیده می‌شود که به عمق بحرانی موسوم بوده و در شرایط  $Fr = 1$

رخ می‌دهد. مقدار عمق بحرانی با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۷-۳۱) برابر است با:

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (۷-۳۳)$$

رابطه‌ی حاصله را می‌توان بر حسب عدد فرود نیز بازنویسی نمود و همچنین به دلیل وجود ارتباط بین عمق بعد از پرش ( $y_2$ ) و قبل از پرش ( $y_1$ ) رابطه‌ی این دو را نیز صریح‌تر بیان داشت، یعنی از پیوستگی:

$$Fr_1^2 y_1^3 = Fr_2^2 y_2^3 \quad (۳۴-۷)$$

از ممنتم و پیوستگی:

$$(1 + 2Fr_1^2)Fr_1^{\frac{-4}{3}} = (1 + 2Fr_2^2)Fr_2^{\frac{-4}{3}} \quad (۳۵-۷)$$

و همچنین می‌توان از ترکیب پیوستگی و ممنتم داشت:

$$Fr_2 = \frac{2\sqrt{2}Fr_1}{(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (۳۶-۷)$$

به طریق مشابه:

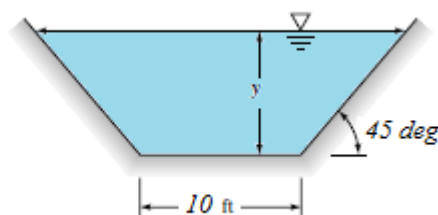
$$y_2 = \frac{-y_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \frac{2V_1^2 y_1}{g}} \quad (۳۷-۷)$$

$$(۳۷-۷)$$

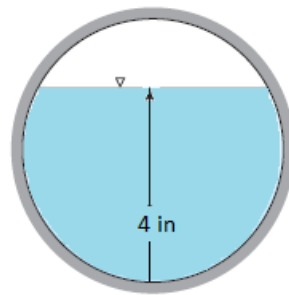
## مسائل فصل هفتم

۱-۷ در یک کانال مثلثی با زاویه رأس  $30^\circ$  درجه، شیب مسیر  $0.0005$  می‌باشد. در صورتیکه کانال از جنس بتن ناصاف باشد و عمق جریان  $1$  متر برآورد گردد، دبی قابل حمل کانال در شرایط پایا چقدر است؟

۲-۷ در یک کانال دوزنقه‌ای از جنس دیواره‌ی ورق کرکری با دبی  $100$  فوت مکعب در ثانیه و شیب کف  $0.0005$  عمق جریان را براساس مشخصات هندسی شکل زیر محاسبه کنید.



۳-۷ در جریان فاضلاب سبک (آب) در یک لوله‌ی فاضلاب به قطر داخلی  $6$ ، عمق جریان  $4$  می‌باشد. در صورتیکه شیب لوله‌ی فاضلاب در هر  $100$  فوت، یک فوت باشد، دبی این خط فاضلاب را محاسبه کنید.



Circular channel

۴-۷ شیب بام ساختمان‌ها معمولاً براساس میزان بارندگی منطقه برآورد می‌شود. در صورتیکه بارندگی یک منطقه معادل  $20$  لیتر در ثانیه برای یک کانال مستطیلی با شیب  $0.02$  باشد، بهترین ابعاد کانال را محاسبه کنید.

۵-۷ بهترین مقطع کانال مثلثی را محاسبه کنید.

۶-۷ در یک پرش هیدرولیکی  $Fr_1 = 3$  می‌باشد، عدد فرود بعد از پرش را محاسبه کنید.

۷-۷ در جریان یک کانال باز با عمق جریان  $0.3m$  و سرعت  $3 \frac{m}{sec}$  در صورت وقوع پرش هیدرولیکی، عمق جریان پس از پرش را محاسبه کنید. (عرض کانال  $1m$  و مقطع آن مستطیلی می‌باشد).

۸-۷ در یک سیستم هیدرولیکی آزمایشگاهی برای مطالعه‌ی پرش هیدرولیکی موانع مصنوعی توسط دریچه‌های کنترل دبی خروجی از کانال جریان ایجاد می‌شود. در صورتیکه جریان مسئله‌ی ۷-۷ در این آزمایشگاه شبیه‌سازی شود و فاصله‌ی ابتدا و انتهای کانال  $15$  متر باشد، برآوردی از محل پرش ارایه دهید.

۱- " مکانیک سیالات (جلد اول) "، نیما امانی فرد، انتشارات دانشگاه گیلان.

- [2] F. White, "Fluid Mechanics", McGraw – Hill, 5<sup>th</sup> Edition, USA, 2003.
- [3] H. Schlichting, "boundary layer theory", McGraw – Hill, 7<sup>th</sup> Edition, USA, 1979.
- [4] F. White, "Viscous Fluid Flow", McGraw-Hill, 2<sup>th</sup> Edition, USA, 1991.
- [5] G.K. Batchlor, "Fluid Mechanics", Cambridge University, 1967.
- [6] H.R. Vallentine, "Applied Hydrodynamics", Newnes-Butterworth, 1969.
- [7] R. Fox, A. McDonald, P. Pritchard, "Introduction to Fluid Mechanics", 6<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons, 2006.
- [8] A.R. Paterson, "A First Course in Fluid Dynamics", Cambridge University, 1983.
- [9] S. Goldstein, "Modern Developments in Fluid Dynamics", Dover, New York, 1965.
- [10] A. Bejan, "Advanced Engineering Thermodynamics", 3<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons, 2006.
- [11] R.H. French, "Open Channel Hydraulics", McGraw – Hill, 1959.
- [12] E.F. Brater, "Handbook of Hydraulics", McGraw – Hill, 1996.
- [13] J.D. Anderson, "Fundamentals of Aerodynamics", McGraw – Hill, 2001.
- [14] R.D. Belvins, "Applied Fluid Dynamics Handbook", Krieger, 1992.
- [15] J.O. Hinze, "Turbulence", McGraw-Hill, 1975.
- [16] P.G. Drazin, "Introduction to Hydrodynamic Stability", Cambridge University Press, 2002.

[17] W.M. Kays and M.E.Crawford, "Convective Heat and Mass Transfer", McGraw-Hill, 1993.

[18] G.J. Van Wylen and R.E.Sonntag, "Fundamentals of Classical Thermodynamics", 5<sup>th</sup> Edition, John Wiley & Sons, 1988.

۱۹- "جریان لزج"، بیژن فرهانیه، انتشارات دانشگاه گیلان.

## سوالات آزمون کارشناسی ارشد

۱- اگر تابع دلخواه  $\psi$  به طوری داده شده باشد که:  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  و  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ، چرخش  $\zeta$  برحسب  $\psi$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{2}\nabla^2\psi$       (۲)  $+\frac{1}{2}\nabla^2\psi$       (۳)  $\nabla^2\psi$       (۴)  $-\nabla^2\psi$

جواب: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\zeta = 2\omega = \frac{2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right] = -\nabla^2\psi$$

۲- اگر در جریان دو بعدی مولفه های سرعت  $u = -\frac{y}{b^2}$  و  $v = \frac{x}{a^2}$  باشند، آنگاه کدام گزینه صحیح می باشد؟

(۱) سیال تراکم ناپذیر است و معادله  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  یک خط جریان آن است.

(۲) سیال تراکم پذیر است و معادله  $x^2 + y^2 = 1$  یک خط جریان آن است.

(۳) سیال تراکم پذیر است و معادله  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  یک خط جریان آن است.

(۴) سیال تراکم ناپذیر است و معادله  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  یک خط جریان آن است.

جواب: گزینه ۱ صحیح می باشد.

برای سیال تراکم ناپذیر در حالت دو بعدی داریم:  $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$  ,  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$

$$\vec{V} = -\frac{y}{b^2}\hat{i} + \frac{x}{a^2}\hat{j}$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{y}{b^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{a^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

معادله خط جریان

$$\text{که فقط برای معادله } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ صادق است.}$$

۳- اگر در جریان یک بعدی  $\vec{V} = u(x, t)\hat{i}$  و دانسیته متغیر با رابطه  $\rho = \rho_0(1.5 + \cos \omega t)$  داده شده باشد،

سرعت  $\vec{V}$  به شرطی که  $u(0, t) = U$  کدام گزینه است؟

$$\vec{V} = \left( \frac{\sin \omega t}{1.5 + \cos \omega t} + U \right) \hat{i} \quad (۳) \qquad \vec{V} = (\omega \sin \omega t + U) \hat{i} \quad (۱)$$

$$\vec{V} = \left( \frac{\omega x \sin \omega t}{1.5 + \cos \omega t} + U \right) \hat{i} \quad (۴) \qquad \vec{V} = \left( \frac{\omega \sin \omega t}{\cos \omega t} + U \right) \hat{i} \quad (۲)$$

جواب: گزینه ۴ صحیح می باشد.

طبق رابطه پیوستگی داریم: (در حالت یک بعدی)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \Rightarrow -\rho_0 \omega \sin \omega t + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 (1.5 + \cos \omega t) u) = 0$$

$$\text{با انتگرال گیری} \Rightarrow (1.5 + \cos \omega t) u = x \omega \sin \omega t + C$$

$$u(0, t) = U \Rightarrow C = U(1.5 + \cos \omega t)$$

$$u = \frac{\omega x \sin \omega t}{1.5 + \cos \omega t} + U$$

۴- اگر میدان سرعت یک جریان توسط رابطه  $\vec{V} = x^2 y \hat{i} + x^2 t \hat{j}$  داده شده باشد، خطوط جریان عبوری از

مبدا مختصات و در لحظه  $t = 1$  کدام گزینه است؟

$$y = \sqrt{2x} \quad (۴) \qquad y = \sqrt{x} \quad (۳) \qquad y = x^2 \quad (۲) \qquad y = x \quad (۱)$$

جواب: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{x^2 t}{x^2 y} \Rightarrow y dy = t dx \\ \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 &= tx + C, x=0 \rightarrow y=0 \Rightarrow C=0 \\ y &= \sqrt{2tx} \xrightarrow{t=1} y = \sqrt{2x} \end{aligned}$$

۵- با توجه به رابطه  $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$  کدام یک از فرضیات زیر در نظر گرفته شده است؟

- (۱) صدق معادله پیوستگی، تراکم ناپذیری، جریان نیوتنی
- (۲) نیازی به پیوستگی نمی باشد، تراکم ناپذیری، جریان نیوتنی
- (۳) صدق معادله پیوستگی، تراکم پذیری، جریان نیوتنی
- (۴) صدق معادله پیوستگی، تراکم ناپذیری، هم جریان نیوتنی و هم غیر نیوتنی

جواب: گزینه ۱ صحیح می باشد.

۶- در یک جریان دو بعدی، تراکم ناپذیر و غیر دائم، میدان سرعت با رابطه  $\vec{V} = xt\hat{i} - yt\hat{j}$  معرفی شده

است، مقدار شتاب کل را در  $t=1$  کدام گزینه است؟

$$\begin{aligned} a &= 2x + y^2 \quad (۳) & a &= \sqrt{4x^2 + (y^2 - y)^2} \quad (۱) \\ a &= \sqrt{4x^2 + y^2} \quad (۴) & a &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad (۲) \end{aligned}$$

جواب: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow a_x = x + xt^2 \Big|_{t=1} = 2x \\ a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow a_y = -y + y^2 t \Big|_{t=1} = y^2 - y \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{4x^2 + (y^2 - y)^2}$$

۷- برای یک جریان تراکم‌ناپذیر غیر لزج میدان جریان با عبارت  $\vec{V} = 2xy\hat{i} - y^2\hat{j}$  مشخص شده است. با

فرض صرفنظر از گرانش و چگالی  $\rho_0$  به صورت ثابت، گرادیان فشار در جهت  $x$  کدام است؟

(۱)  $-2\rho_0 xy^2$       (۲)  $2\rho_0 xy^2$       (۳)  $2\rho_0 xy$       (۴)  $\rho_0 xy^2$

جواب: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\rho_0 \left[ u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} \right] = -\nabla P \Rightarrow \rho_0 [(2xy)(2y\hat{i}) + (-y^2)(2x\hat{i} - 2y\hat{j})] = -\nabla P \Rightarrow \nabla P = -\rho_0 [2xy^2\hat{i} + 2y^3\hat{j}]$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -2\rho_0 xy^2$$

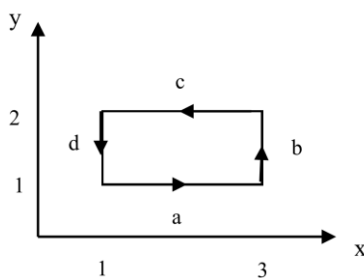
۸- برای میدان سرعت  $u = -By$  و  $v = Bx$  مقدار سیرکولاسیون بر روی شکل نشان داده شده کدام است؟

(۱)  $4B$

(۲)  $2B$

(۳)  $0$

(۴)  $-4B$



جواب: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\Gamma = \oint V \cdot ds = \int_a u \cdot ds + \int_b v \cdot ds + \int_c u \cdot ds + \int_d v \cdot ds = (-B)(2) + (3B)(1) + (2B)(2) + (-B)(1) = +4B$$

۹- اگر در یک میدان سرعت رابطه  $\nabla^2 \psi = -2xy$  برقرار باشد، مقدار ورتیسیته در نقطه  $(1,1)$  در این

میدان کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۲+ (۳) ۳- (۴) ۴- (۱)

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\nabla^2 \psi = -\zeta \Rightarrow \zeta = 2xy \Rightarrow \zeta = 2$$

۱۰- کدام یک از جملات زیر درست می باشند؟

(۱) مقدار تابع جریان روی مرز ساکن حتماً صفر است.

(۲) مقدار تابع جریان روی مرز ساکن می تواند هر مقداری باشد.

(۳) تابع پتانسیل در همه جریان های چرخشی و غیر چرخشی مطرح می شود.

(۴) تابع پتانسیل فقط در جریان های چرخشی مطرح می شود.

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

۱۱- میدان جریان با سرعت  $\vec{V} = (t^2 + 5t)\hat{i} + (y^2 - z^2 - 1)\hat{j} - (y^2 + 2yz)\hat{k}$  مفروض است. آهنگ انبساط

سیال در نقطه  $(3,2,4)$  و در لحظه  $t=2$  کدام گزینه است؟ (کلیه ابعاد در SI داده شده اند).

- (۱)  $4\frac{1}{s}$  (۲)  $-4\frac{1}{s}$  (۳)  $8\frac{1}{s}$  (۴) ۰

جواب: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 + (2y) + (-2y) = 0$$

۱۲- برای میدان مشخص شده در سوال ۱۱، سطحی را که در آن، جریان غیر چرخشی است، کدام است؟

$$x=0 \quad (۱) \quad z=0 \quad (۳)$$

$$y=0 \quad (۲) \quad \text{جریان در همه جا غیر چرخشی است.} \quad (۴)$$

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\zeta} \Rightarrow \vec{\zeta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ t^2 + 5t & y^2 - z^2 - 1 & -y^2 - 2yz \end{vmatrix}$$

که تنها یک مولفه مخالف صفر به صورت  $|\zeta| = 2y$  دارد لذا در سطح  $y=0$  سیال غیر چرخشی است.

۱۳- کدام یک از گزینه های زیر، معرف شتاب سیال مربوط به میدان سرعت  $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$  می باشد؟

در این روابط  $\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$  معرف چرخش سیال است.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{\zeta}) \quad (۳) \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) + \vec{\zeta} \times \vec{V} \quad (۱)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{|\vec{V}|^2}{2} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\zeta} \right) \quad (۴) \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \left[ \vec{\nabla} \left( \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) + \vec{V} \right] \quad (۲)$$

جواب: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{\nabla} \left( \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) + \vec{\zeta} \times \vec{V} \quad \text{باید نشان دهیم که}$$

$$\begin{aligned} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} &= \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \\ &= \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{j} + \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

اما

$$\vec{\nabla} \left( \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{V} \cdot \vec{V}) = \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{i} + \left( u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} \right) \hat{j} + \left( u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \hat{k} \quad \text{I}$$

$$\begin{aligned} \vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \Rightarrow \vec{\zeta} \times \vec{V} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= \left( w \frac{\partial u}{\partial z} - w \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{i} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{j} + \left( v \frac{\partial w}{\partial y} - v \frac{\partial v}{\partial z} - u \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{k} \quad \text{II} \end{aligned}$$

با جمع I و II و ساده‌سازی، همان مقدار  $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$  حاصل می‌شود.

۱۴- اگر  $\vec{\zeta}$  بردار چرخش (Vorticity) یک میدان جریان باشد، کدام گزینه درست است؟

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\zeta}) = 0 \quad (۱) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\zeta} = 0 \quad (۲) \quad \vec{\nabla} \times \vec{\zeta} = 0 \quad (۳) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{\zeta}) = 0 \quad (۴)$$

جواب: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به این که دیورژانس کرل یک تابع برداری صفر است داریم:  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\zeta} = 0$

۱۵- چنانچه بردار سرعت میدان جریانی به صورت  $\vec{V} = (3z - x^2)\hat{i} + yt^2\hat{j} + xz^2\hat{k}$  (در SI) باشد، آنگاه

مولفه‌ی شتاب در راستای محور  $y$  کدام گزینه خواهد بود؟

$$xt^4 + 2xt \quad (۱) \quad zt^4 + 2zt \quad (۲) \quad yt^4 + 2yt \quad (۳) \quad yt + 2yt^2 \quad (۴)$$

جواب: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = 2ty + (3z - x^2)(0) + (yt^2)(t^2) + (xz^2)(0)$$

$$\Rightarrow a_y = yt^4 + 2yt$$

۱۶- جریانی با میدان سرعت  $\vec{V} = \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j}$  در SI مفروض است. معادله خط جریان گذرا از نقطه (0,5) کدام است؟

(۱)  $y^2 - x^2 = 25$       (۲)  $x^2 - y^2 = 25$       (۳)  $x^2 + y^2 = 25$       (۴)  $y^2 - x = 25$

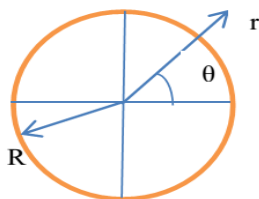
جواب: گزینه ۳ صحیح می باشد.

حل:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c \xrightarrow{(0,5) \in C} \frac{1}{2}(5)^2 + 0 = c \rightarrow c = \frac{25}{2}$$

$$x^2 + y^2 = c \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

۱۷- از ترکیب جریان یکنواخت با سرعت  $U_0$  یک دوقلو با قدرت  $X$  و یک گردابه‌ی ساعتگرد با قدرت  $k$  به صورت  $\psi = -U_0 r \sin \theta + \frac{X \sin \theta}{r} - \frac{k}{2\pi} \ln \frac{r}{R}$  می باشد، جریان حول استوانه-ی در گردش به دست می آید. اگر ضریب برآی ایجاد شده  $C_L$  در جریان حول استوانه برابر ۵ باشد مکان نقاط سکون در چه زاویه‌ی  $\theta$  ای از استوانه خواهد بود؟



(۳)  $\theta_1 = \theta_2 = 133.4^\circ$

(۴)  $\theta_1 = 133.4^\circ, \theta_2 = 163.4^\circ$

(۱)  $\theta_1 = 336.6^\circ, \theta_2 = 203.46^\circ$

(۲)  $\theta_1 = 23.4^\circ, \theta_2 = 156.54^\circ$

جواب: گزینه ۱ صحیح می باشد.

حل:

$$C_L = \frac{k}{RU_0} = 5 \Rightarrow k = 5RU_0$$

اما چون  $k = 5RU_0 < 4\pi RU_0$  نقاط سکون روی استوانه در موقعیت ذیل خواهد بود:

$$r = R, \theta = \sin^{-1}\left(-\frac{k}{4\pi RU_0}\right) = \sin^{-1}(-0.398) \Rightarrow \theta_1 = 336.6^\circ, \theta_2 = 203.46^\circ$$

۱۸- در ترکیب جریان حاصل از چشمه‌ای به دبی حجمی بر واحد سطح  $q$  واقع در مبدا مختصات و جریان یکنواخت به موازات محور  $x$  و در سوی مثبت آن، مختصات نقطه‌ی سکون کدام است؟ سرعت جریان یکنواخت  $U$  می‌باشد.

$$\begin{array}{ll} (1) & (\infty, 0) \\ (2) & \left(-\frac{q}{2\pi U}, 0\right) \\ (3) & \left(0, \frac{q}{2\pi U}\right) \\ (4) & \left(-\frac{q}{2\pi U}, \frac{q}{2\pi U}\right) \end{array}$$

جواب: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

حل:

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} + Uy$$

$$u = \psi_y = \frac{q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} + U = 0$$

$$v = -\psi_x = \frac{q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + 0^2} + U = 0 \Rightarrow \frac{q}{2\pi} \frac{1}{x} = -U \Rightarrow x = -\frac{q}{2\pi U}$$

پس نقطه سکون  $\left(-\frac{q}{2\pi U}, 0\right)$  می‌باشد.

۱۹- تابع جریان میدان سرعت دوبعدی پایا و تراکم‌ناپذیر  $\vec{V} = (x^2y - xy^2)\hat{i} + \left(\frac{y^3}{3} - xy^2\right)\hat{j}$  کدام گزینه است؟  $(\psi(0,0) = 0)$

$$(1) \quad \psi = \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}xy^3 \quad (2) \quad \psi = \frac{1}{3}x^3y^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 \quad (3) \quad \psi = \frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{3}xy^3 \quad (4) \quad \psi = y^2 - 2xy$$

جواب: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

حل:

$$x^2y - xy^2 \Rightarrow \psi = \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}xy^3 + f(x) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} =$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{y^3}{3} - xy^2 \Rightarrow \frac{y^3}{3} - xy^2 = -xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + f'(x) \Rightarrow f'(x) = c \Rightarrow \psi = \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}xy^3$$



۲۰- تابع پتانسیل سرعت جریانی دوبعدی و پایا به شکل  $\phi = 2xy + y$  می‌باشد. میدان دما در این جریان با تابع اسکالر  $T = x^2 + 3xy + 2$  بر حسب درجه سلسیوس بدست می‌آید. آهنگ تغییر دما برای المانی از سیال که در حال گذر از نقطه (2,3) می‌باشد چند درجه سلسیوس بر ثانیه خواهد بود؟

۱۰۸ (۴)

۵۴ (۳)

۶ (۲)

۲۴ (۱)

جواب: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

حل:

$$\frac{DT}{Dt} = \cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} + u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\left. \begin{aligned} u = \phi_x = 2y, v = \phi_y = 2x + 1 \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 2x + 3y, \frac{\partial T}{\partial y} = 3x \end{aligned} \right\} \longrightarrow \frac{DT}{Dt} = 0 + (2y)(2x + 3y) + (2x + 1)(3x)$$

$$\frac{DT}{Dt} = 6x^2 + 3x + 4xy + 6y^2 \xrightarrow{(2,3)} \frac{DT}{Dt} \bigg|_{(2,3)} = 108 \frac{^\circ C}{s}$$

۲۱- گردابه (vortex) دوبعدی:

(۱) قدرتی برابر با گردش (سیرکولاسیون) پیرامون منحنی بسته ای شامل مرکز گردابه دارد.

(۲) خطوط جریان شعاعی دارد.

(۳) همواره سیرکولاسیونی برابر صفر حول هر منحنی بسته دارد.

(۴) سرعتی دارد که مستقیماً با فاصله ی شعاعی از مرکز گردابه متناسب است.

جواب: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۲۲- گردابه‌ای با تابع جریان  $\psi = \frac{1}{2} \ln r + 2y$  با جریان یکنواختی موازی X و با سرعت  $u = +2\hat{i}$  (در

SI) ترکیب شده است. بزرگی سرعت جریان حاصل در (2,2) چند متر بر ثانیه است؟

۰ (۴)

۲,۱۳ (۳)

۲,۱۲۵ (۲)

۰,۱۲۵ (۱)

جواب: گزینه ۳ صحیح می باشد.

حل:

$$\psi = \frac{1}{2} Lnr + 2y = \frac{1}{2} Ln\sqrt{x^2 + y^2} + 2y$$

$$V(x, y) = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\psi_y^2 + (-\psi_x)^2} = \sqrt{\left(2 + \frac{1}{4} \frac{2y}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4} \frac{2x}{x^2 + y^2}\right)^2}$$

$$V(2,2) = \sqrt{\left(2 + \frac{1}{8}\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)^2} = 2.13 \frac{m}{s}$$

۲۳- جریان سیال با مولفه های  $u = e^x + y$  و  $v = ye^x + x$  دارای:

(۱) تابع پتانسیل به شکل  $\phi = e^x + xy + \frac{1}{2} y^2 e^x + \frac{1}{2} x^2$  است.

(۲) تابع پتانسیل به شکل  $\phi = e^x + xy$  است.

(۳) تابع پتانسیل به شکل  $\phi = \frac{1}{2} y^2 e^x + \frac{1}{2} x^2$  است.

(۴) تابع پتانسیل نیست.

جواب: گزینه ۴ صحیح می باشد.

توجه کنید که  $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = ye^x \neq 0$  لذا جریان غیر چرخشی نیست.

۲۴- پتانسیل سرعت یک جریان دوبعدی درمختصات قطبی به صورت  $\phi = 4r^2 \cos 2\theta$  می باشد. تابع

جریان و مختصات نقطه ی سکون این میدان به ترتیب کدام است؟ (C مقدار ثابتی است)

$$(1) \quad \psi = \frac{1}{4} r^2 \sin 2\theta + c \quad \text{و} \quad \left(2, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3)$$

$$(2) \quad \psi = 4r^2 \sin 2\theta + c \quad \text{و} \quad (0,0) \quad (4)$$

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

حل:

$$\phi = 4r^2 \cos 2\theta$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 8r \cos 2\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 8r^2 \cos 2\theta \Rightarrow \psi = 4r^2 \sin 2\theta + f(r)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -8r \sin 2\theta \Rightarrow f(r) = c$$

$$\psi = 4r^2 \sin 2\theta + c$$

stag.point:

$$u_r = 8r \cos 2\theta = 0$$

$$u_\theta = -8r \sin 2\theta = 0$$

واضح است که به ازاء  $r=0$  داریم  $u_\theta = u_r = 0$  یعنی مبدا مختصات نقطه سکون می باشد.

۲۵- دو جریان دوقطبی واقع در مبدا دارای محورهای عمود برهم می باشند. به طوری که  $\phi_1 = \frac{64 \cos \theta}{r}$

و  $\phi_2 = \frac{64 \sin \theta}{r}$  (در SI) می باشد. اندازه ی سرعت در نقطه ی  $(x=4m, y=4m)$  چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) ۲ (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{2}$  (۴) ۰

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

حل:

در مختصات دکارتی داریم:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{64x}{x^2 + y^2} + \frac{64y}{x^2 + y^2}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 64 \left[ \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{0 - y(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \right]_{(4,4)} = -2$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 64 \left[ \frac{0 - x(2y)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \right]_{(4,4)} = -2$$

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{\sqrt{2}}{32} \times 64 = 2\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

۲۶- چشمه‌ای با قدرت (دبی حجمی بر واحد سطح)  $q = 20 \frac{m^3}{s.m}$  واقع در مبدا با جریان یکنواختی با سرعت

$\vec{U} = +3\hat{i}$  ترکیب شده است. اختلاف هد فشار بین دو نقطه‌ی  $A(x = -10m, y = 0)$  و  $B(x = 0, y = 1.67m)$  چند متر است؟

- (۱) ۳,۵۵ (۲) ۱,۹ (۳) ۰,۲۷۵ (۴) ۰,۵۱

جواب: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

حل:

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} + Uy = \frac{10}{\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} + 3y$$

$$u = \psi_y = 3 + \frac{10}{\pi} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right\} \left( \frac{1}{x} \right) = 3.38 \frac{m}{s}$$

$$v = -\psi_x = -\frac{10}{\pi} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right\} \left( \frac{-y}{x^2} \right) = 0.51 \frac{m}{s}$$

$$A \rightarrow u = 3 - \frac{20}{2\pi \times 10} = 2.68 \frac{m}{s}, v = 0 \Rightarrow V_A = 2.68 \frac{m}{s}$$

$$B \rightarrow u = 3 \frac{m}{s}, v = \frac{20}{2\pi \times 1.67} = 1.9 \frac{m}{s} \Rightarrow V_B = \sqrt{3^2 + 1.9^2} = 3.55 \frac{m}{s}$$

$$\frac{P_A}{\gamma} - \frac{P_B}{\gamma} = \frac{V_A^2}{2g} - \frac{V_B^2}{2g} = \frac{3.55^2 - 2.68^2}{19.62} = 0.275m$$

۲۷- در میدان سرعتی با تابع جریان  $\psi = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + xy$  (در SI)، سیرکولاسیون حول مربعی به

اضلاع  $x = \pm 2, y = \pm 2$  در خلاف جهت عقربه‌های ساعت (CCW) چند مترمربع بر ثانیه است؟

- (۱) ۰ (۲) -۳۲ (۳) -۱۶ (۴) -۸

جواب: گزینه ۳ صحیح می باشد.

حل:

$$u = \psi_y = y + x$$

$$v = -\psi_x = x^2 - y$$

$$\mapsto \Gamma = \int_{x=-2}^2 (-2+x)dx + \int_{y=-2}^2 (4-y)dy + \int_{x=2}^{-2} (2+x)dx + \int_{y=-2}^2 (4-y)dy = -8+16-8-16 = -16 \frac{m^2}{s}$$

۲۸- میدان سرعتی در SI به صورت  $\vec{V} = (x^2 - 4y + 3x)\hat{i} - (2xy + 3y)\hat{j}$  مفروض است. این میدان دارای چند نقطه سکون است؟

- ۱) ۳      ۲) ۲      ۳) ۱      ۴) ۰

جواب: گزینه ۱ صحیح می باشد.

حل:

$$u = x^2 - 4y + 3x = 0$$

$$v = -(2xy + 3y) = 0$$

$$\rightarrow y = 0, x = -\frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{9}{16}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 3$$

پس نقاط سکون (0,0) و (-3,0) و  $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{16}\right)$  می باشند.

۲۹- برای یک جریان دوبعدی تراکم ناپذیر تابع اسکالر  $\psi$  به گونه ای تعریف می شود که داشته باشیم

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ و } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ در این صورت رتیسیتی در هر نقطه برابر کدام یک از گزینه های زیر خواهد}$$

بود؟ (k بردار یکه روی محور Z است)

$$1) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi) \hat{k} \quad 3) \quad |\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \psi)| \hat{k}$$

$$2) \quad -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi) \hat{k}$$

$$-\left|\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \psi)\right| \hat{k} \quad (۴)$$

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

حل:

جریان دوبعدی است لذا  $\xi_x = \xi_y = 0$ :

$$\xi_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \psi = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi)$$

۳۰- یک چاه دو بعدی با دبی حجمی بر واحد سطح  $q$  واقع در مبدا مختصات در معرض جریانی یکنواخت با سرعت  $U$  که با محور  $x$  زاویه  $\theta$  می سازد قرار گرفته است. مختصات نقطه سکون کدام گزینه است؟

$$\left(\frac{q \cos \theta}{2\pi U}, \frac{q \sin \theta}{2\pi U}\right) \quad (۳) \quad \left(\frac{q}{2\pi U}, 0\right) \quad (۱)$$

$$\left(\frac{q \sin \theta}{2\pi U}, \frac{q \cos \theta}{2\pi U}\right) \quad (۴) \quad \left(0, \frac{q}{2\pi U}\right) \quad (۲)$$

جواب: گزینه ۳ صحیح می باشد.

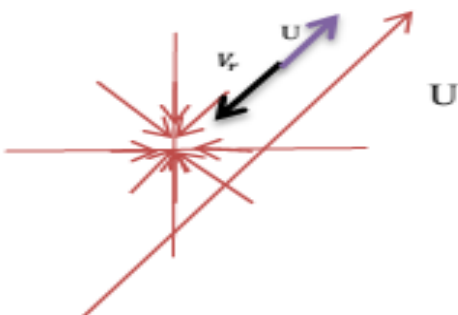
حل:

$$V_r = -\frac{q}{2\pi r}$$

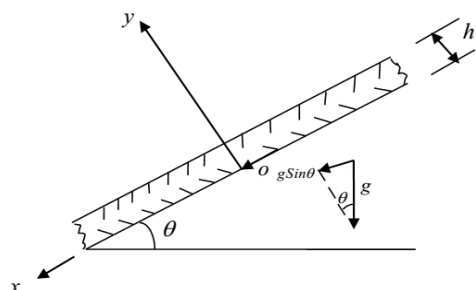
باید  $|V_r| = U$  باشد لذا:

$$\frac{q}{2\pi r} = U \Rightarrow r = \frac{q}{2\pi U}$$

$$x = r \cos \theta = \frac{q \cos \theta}{2\pi U}, y = r \sin \theta = \frac{q \sin \theta}{2\pi U}$$



۳۱- فیلمی از یک سیال تراکم‌ناپذیر به ضخامت  $h$ ، روی سطحی که با افق زاویه  $\theta$  می‌سازد، جریان دارد. اگر گرانشی سیال  $\mu$  و چگالی آن  $\rho$  فرض شود، دبی جریان در واحد عمق برابر خواهد بود با: (  $y$  فاصله عمودی از سطح است. )



$$\frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} (2hy - y^2) \quad (۱)$$

$$\frac{\rho g \cos \theta}{2\mu} (2hy - y^2) \quad (۲)$$

$$\frac{\rho g \sin \theta \cdot h^3}{3\mu} \quad (۳)$$

$$\frac{\rho g \cos \theta \cdot h^3}{3\mu} \quad (۴)$$

جواب: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \theta + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -g \sin \theta \quad \& \quad u|_{y=0} = 0 \quad \frac{du}{dy}|_{y=h} = 0$$

بنابراین از حل معادله دیفرانسیل سرعت و اعمال شرایط مرزی داریم :

$$u = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} (2hy - y^2)$$

$$q = \int_0^h u dy = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} \left( hy^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^h = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} \cdot \frac{2h^3}{3} = \frac{\rho g \sin \theta \cdot h^3}{3\mu}$$

۳۲- جریان دوبعدی سیال ایده‌آل با تابع  $f(z) = \ln z$  مفروض است. برای این جریان مولفه سرعت در جهت محور  $x$  ها کدام گزینه است.

$$\frac{y}{x^2 - y^2} \quad (۳)$$

$$\frac{x}{x^2 - y^2} \quad (۴)$$

$$\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (۱)$$

$$\frac{x}{x^2 + y^2} \quad (۲)$$

جواب: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$f(z) = \ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta \Rightarrow \begin{cases} \psi = \ln r = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \\ \phi = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$u = \frac{-\partial\phi}{\partial x} = \frac{y/x^2}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

یا

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

۳۳- درون سیال غیرلزج، کدام یک از عبارتهای زیر برای میدان سرعت صحیح است؟

- (۱) تنها ناپیوستگی سرعت مماسی در نقاطی از میدان جریان ممکن است.
- (۲) تنها ناپیوستگی سرعت عمودی در نقاطی از میدان جریان ممکن است.
- (۳) هم ناپیوستگی سرعت عمودی و هم ناپیوستگی سرعت مماسی در نقاطی از میدان جریان ممکن است.

(۴) ناپیوستگی سرعت در هیچ قسمت از میدان جریان ممکن نیست.

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

۳۴- برای میدان سرعت  $\vec{v} = \frac{1}{t+1} \hat{i} + \hat{j}$  که در آن، معادله خط مسیر ذره‌ای که در لحظه ی  $(t=0)$  از

نقطه  $(1,1)$  عبور می کند، کدام گزینه است؟

- |                         |                     |
|-------------------------|---------------------|
| $y = 2 - e^{(x-1)}$ (۳) | $y = z$ (۱)         |
| $y = 0$ (۴)             | $y = e^{(x-1)}$ (۲) |

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.



$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = u = \frac{1}{1+t} &\Rightarrow x = \ln(1+t) + c_1 \\ \frac{dy}{dt} = v = 1 &\Rightarrow y = t + c_2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow[t=0]{x=1, y=1} \begin{aligned} 1 &= \ln 1 + c_1 \\ 1 &= 0 + c_2 \end{aligned} \rightarrow c_1 = c_2 = 1$$

$$\begin{cases} x = \ln(1+t) + 1 \\ y = t + 1 \end{cases} \rightarrow x = \ln y + 1 \rightarrow y = \exp(x-1)$$

۳۵- مولفه‌های سرعت یک میدان جریان دوبعدی به صورت  $u = x(1+t), v = 1$  در  $SI$  داده شده است.

معادله خط جریان گذرا از نقطه  $(1,1)$  در لحظه‌ی  $t=0$  کدام گزینه است؟

$$\begin{aligned} y-1 + \frac{(y-1)^2}{2} &= \ln x & (۳) \\ y &= \ln x + 1 & (۱) \\ x &= \ln y + 1 & (۲) \\ x &= \exp(y+1) & (۴) \end{aligned}$$

جواب: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\frac{dx}{d\varphi} = x(1+t) \Rightarrow \ln x = (1+t)\varphi + c_1 \Rightarrow x = c_1 e^{(1+t)\varphi}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = 1 \Rightarrow y = \varphi + c_2$$

$$t=0 \rightarrow \varphi=0: x=y=1 \Rightarrow \begin{cases} x = e^{(1+t)\varphi} \\ y = \varphi + 1 \end{cases} \Rightarrow x = e^{y-1} \Rightarrow y = \ln x + 1$$

۳۶- میدان سرعت  $v = (16x^2 + y)\hat{i} + 10\hat{j} + yz^2\hat{k}$  (در  $SI$ ) مفروض است. مقدار سیرکولاسیون این جریان

حول مستطیل بسته  $D$  با مشخصات داده شده و در سوی مثبت چند  $m^2/s$  است.

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 10, y = 0 \\ 0 \leq y \leq 5, x = 10 \\ 0 \leq x \leq 10, y = 5 \\ 0 \leq y \leq 5, x = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad (۱)$$

$$-50 \quad (۲)$$

$$\frac{1600}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{1600}{3} \quad (\epsilon)$$

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{x=0}^{10} u dx + \int_{y=0}^5 v dy + \int_{x=10}^0 u dx + \int_{y=5}^0 v dy \\ &= \int_0^{10} 16x^2 dx + \int_0^5 10 dy + \int_{10}^0 (16x^2 + 5) dx + \int_5^0 10 dy = -50 m^2 / s\end{aligned}$$

یا به کمک قضیه استوکس :

$$\left. \begin{aligned}\Gamma &= \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_s (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{A} = \iint_s w_z dA \\ w_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 1 = -1\end{aligned} \right\} \Rightarrow \Gamma = \iint_s (-1) dA = -1 \times 5 \times 10 = -50 \frac{m^2}{s}$$

۳۷- چشمه خطی با دبی بر واحد عمق  $q$  در فاصله  $h$  بالا صفحه تخت طولی قرار دارد. نیروی وارد بر این صفحه کدام گزینه است؟

$$(۱) \text{ صفر} \quad (۲) \frac{\rho q^2}{2\pi h} \quad (۳) \frac{\rho q^2}{4\pi h} \quad (\epsilon) \frac{\rho q^2 \sqrt{2}}{2\pi h}$$

جواب: گزینه ۳ صحیح می باشد.

با استفاده از روش تصاویر به تربیت خواهیم داشت. (چشمه‌ای به طور قرینه نسبت به صفحه قرار می دهیم).

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(z - ih) + \frac{q}{2\pi} \ln(z + ih) - \frac{q}{2\pi} \ln(z^2 + h^2) \quad \text{پتانسیل مختلط}$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y-h}{x}\right) + \frac{q}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y+h}{x}\right) \quad \text{تابع جریان}$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{q}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2 - h^2}\right) \quad \text{و همینطور}$$

$$W(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{z}{z^2 + h^2} \cdot \frac{q}{\pi} \quad \text{سرعت مختلط}$$

اما از سوی دیگر نیروی اعمالی از رابطه زیر قابل حصول خواهد بود.

$$x - iy = i \frac{\rho}{2} \oint_c w^2 dz = \frac{i\rho}{2} \cdot q^2 \cdot \frac{1}{\pi^2} \int_c \left( \frac{z}{z^2 + h^2} \right)^2 dz$$

$$z^2 + h^2 = 0 \Rightarrow z = \pm ih \quad \text{قطب مرتبه دوم}$$

با استفاده از تئوری مانده‌ها

$$A_{-1} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \left\{ (z - z_0)^2 \cdot f(z) \right\}_{z=z_0} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow ih} \left\{ (z - ih)^2 \cdot \frac{z^2}{(z - ih)^2 (z + ik)^2} \right\} = -\frac{i}{4h}$$

قطب بعدی

$$A_{-1} = \lim_{z \rightarrow -ih} \left\{ (z + ih)^2 \cdot \frac{z^2}{(z - ih)^2 (z + ik)^2} \right\} = -\frac{i}{4h}$$

$$x - iy = \frac{i\rho}{2} \cdot q^2 \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot 2\pi i \cdot \left( -\frac{i}{4h} - \frac{i}{4h} \right) = \frac{\rho q^2}{4\pi h} i$$

یعنی  $x = 0, y = -\frac{\rho q^2}{4\pi h} i$  لذا بزرگی نیروی وارده همان  $\frac{\rho q^2}{4\pi h}$  می‌باشد.

۳۸- تابع پتانسیل متناظر با تابع جریان  $\psi = 9r \sin \theta$  در مختصات دکارتی کدام گزینه است؟ (c مقدار ثابتی است).

$$\begin{array}{ll} c + 9x & (۳) \\ c + 9y & (۴) \end{array} \quad \begin{array}{ll} c + 9 \cos \theta & (۱) \\ c + 9 \sin \theta & (۲) \end{array}$$

جواب: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 9 \rightarrow \phi = 9x + f(y) \\ \psi = 9r \sin \theta = 9y &\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow f(y') = 0 \Rightarrow f(y) = c \\ \therefore \phi &= 9x + c \end{aligned}$$

۳۹- چشمه‌ای به قدرت (+2m) در نقطه (a,0) و چاه خطی خطی به قدرت (-m) در مبدا مختصات قرار دارند. در میدان جریان حاصل از ترکیب این دو الگو:

(۱) دارای یک نقطه سکون به مختصات (-a,0) است.

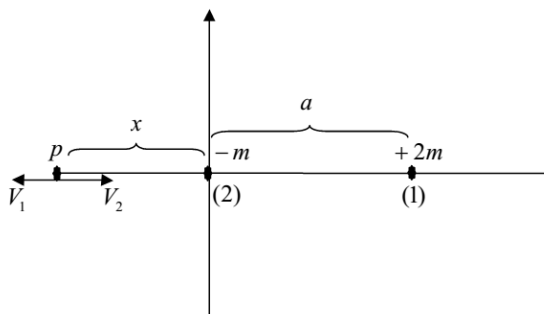
(۲) دارای سه نقطه سکون در صفحه xoy می‌باشد.

۳) دارای یک نقطه سکون به مختصات  $(\frac{a}{3}, 0)$  است.

۴) دارای نقطه سکون نمی باشد.

جواب: گزینه ۱ صحیح می باشد.

نقطه سکون با توجه به الگوی جریان چشمه و چشاه باید الزاما روی محور  $x$  ها باشد و بنابراین:



$$\frac{2m}{2\pi(a+\pi)} = \frac{m}{2\pi x}$$

$$2x = a + x \Rightarrow x = a \Rightarrow p(-a, 0)$$

۴۰- میدان سرعتی با تابع جریان  $\psi(x, y) = 0.04(3x^2y - y^3)$  در  $SI$  مفروض است. اختلاف فشار بین

دو نقطه هم صفحه به مختصات  $O(0,0)$  و  $A(3,4)$  و (مختصات بر حسب متر) با فرض این که چگالی سیال  $1300 \text{ kg/m}^3$  باشد، چند پاسکال می باشد.

۳) ۲۳۹۶,۱۶

۱) ۱۲۴۸

۴) ۵۸۵۰

۲) ۷۵۸,۱۶

جواب: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.12(x^2 - y^2)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -0.24(xy)$$

$$\Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2} = 0.12\sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (-2xy)^2} = 0.12(x^2 + y^2)$$

$$V_0 = 0$$

$$V_A = 0.12(3^2 + 4^2) = 0.12 * 25 = 3 \text{ m/s}$$

$$\Delta P = P_0 - P_A = \frac{1}{2} \rho (V_A^2 - V_0^2) = \frac{1300}{2} (9 - 0) = 5850 \text{ pa}$$

۴۱- میدان سرعت  $\vec{V} = (x^2 - 2xy \cos y^2)\hat{i} + (-2xy + \sin y^2)\hat{j}$  (در SI) دبی جریان در واحد عمق بین خطوط جریان گذرا از نقاط  $O(0,0)$  و  $A(1,\pi)$  (مختصات بر حسب متر است). چند  $m^2/s$  می باشد؟

$$\begin{array}{ll} \pi + \cos \pi^2 & (۳) \quad -2\pi + 9 \sin \pi^2 \quad (۱) \\ \pi - \cos \pi^2 & (۴) \quad \pi - \sin \pi^2 \quad (۲) \end{array}$$

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

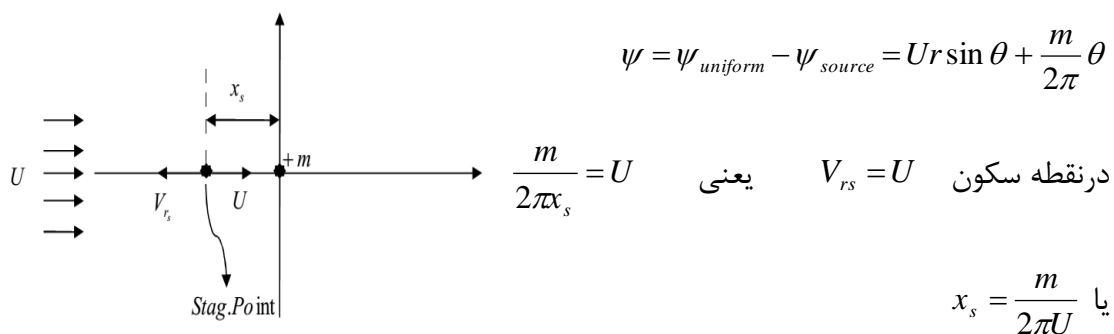
$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2 - 2xy \cos y^2 \rightarrow \psi = x^2 y - x \sin y^2 + f(x) \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow -2xy + \sin y^2 = -2xy + \sin y^2 - f'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \psi = x^2 y - x \sin y^2 + c$$

$$q = \psi(1, \pi) - \psi(0,0) = \pi - \sin \pi^2 \frac{m^3/s}{m}$$

۴۲- جریان ایده آل یکنواختی با سرعت  $\vec{V} = U\hat{i}$  که در آن مقدار ثابتی است، با چشمه ای به قدرت  $m$  (دبی حجمی بر واحد عمق) واقع در مختصات ترکیب شده است. معادله خط جریانی که از نقطه سکون می گذرد، در مختصات قطبی کدام گزینه است؟

$$\begin{array}{ll} r = \frac{m(\pi - \theta)}{2\pi U \cos \theta} & (۳) \quad r = \frac{m\theta}{2\pi U \sin \theta} \quad (۱) \\ r = \frac{m(\pi - \theta)}{2\pi U \sin \theta} & (۴) \quad r = \frac{m\theta}{2\pi U \cos \theta} \quad (۲) \end{array}$$

جواب: گزینه ۴ صحیح می باشد.



پس مختصات نقطه سکون  $\left(r = \frac{m}{2\pi U}, \theta = \pi\right)$  می باشد.

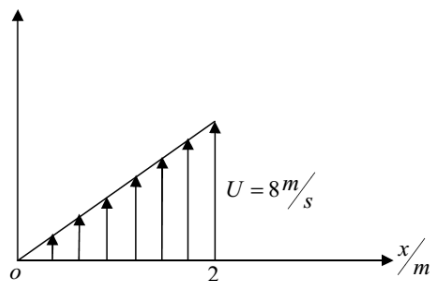
$$\psi_{stag, point} = U \times \frac{m}{2\pi U} \sin \pi + m \times \frac{\pi}{2\pi} = \frac{m}{2} \quad \text{اکنون}$$

پس معادله خط جریان عبوری از نقطه سکون  $\psi = \frac{m}{2}$  می باشد و یا در مختصات قطبی

$$Ur \sin \theta \times \frac{m}{2\pi} \theta = \frac{m}{2} \Rightarrow r = \frac{m(\pi - \theta)}{2\pi U \sin \theta}$$

۴۳- میدان جریان دوبعدی غیرلزج با الگوی شکل رو به رو مفروض است. کدام یک از گزینه های زیر معرف

تابع جریان این میدان می باشد؟



$$\psi = 4xy + c \quad (۱)$$

$$\psi = -4xy + c \quad (۲)$$

$$\psi = -2y^2 + c \quad (۳)$$

$$\psi = -2x^2 + c \quad (۴)$$

جواب: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{V} = 4x\hat{j} \Rightarrow$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4x \rightarrow \psi = -2x^2 + f(y) \xrightarrow{(1)} f'(y) = 0 \rightarrow \psi = -2x^2 + c$$

۴۴- برای میدان سرعت  $\vec{V} = x^2\hat{i} - 2xy\hat{j} + (x+y)\hat{k}$  ( در SI ) بزرگی بردار شتاب سیال در نقطه

(1,1,1) چند متر بر مجذور ثانیه است؟

$$۴ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$2\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۱)$$

جواب: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$u = x^2 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$v = -2xy \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \frac{\partial v}{\partial y} = -2x, \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$w = x + y \rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 1, \frac{\partial w}{\partial y} = 1, \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$a_x = x^2 \cdot (2x) + (-2xy)(0) + (x+y)(0) = 2x^2$$

$$a_y = x^2 \cdot (-2y) + (-2xy)(-2x) + (x+y)(0) = -2x^2y + 4x^2y = 2x^2y$$

$$a_z = x^2 \cdot (1) + (-2xy)(1) + (x+y)(0) = x^2 - 2xy$$

$$(1,1,1) \Rightarrow \vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{4+4+1} = 3m/s^2$$

۴۵- میدان سرعتی درون یک دیفیوزر با رابطه  $\vec{V} = V_0(1 - e^{-ct})(1 - \frac{x}{l})\hat{i}$  مشخص شده است که در آن

$V_0 = 10 \text{ ft/s}$  و  $l = 5 \text{ ft}$  بوده و  $c$  مقدار ثابت مخالف صفر می باشد. به ازای کدام مقدار  $c$ ، شتاب در لحظه  $t = 1 \text{ s}$  برای کلیه مقادیر  $x$  برابر صفر است؟

(۱)  $0.8 \text{ s}^{-1}$       (۲)  $0.49 \text{ s}^{-1}$       (۳)  $0.92 \text{ s}^{-1}$       (۴)  $1.12 \text{ s}^{-1}$

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

با توجه به این که  $\vec{V} = u\hat{i}$  می باشد لذا تنها مولفه شتاب  $a_x$  خواهد بود بنابراین :

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = V_0(1 - \frac{x}{l})ce^{-ct} + V_0^2(1 - e^{-ct})^2(1 - \frac{x}{l})(-\frac{1}{l})$$

$$\Rightarrow a_x = V_0(1 - \frac{x}{l}) \left[ ce^{-ct} - \frac{V_0}{l}(1 - e^{-ct})^2 \right] = 0$$

با جایگذاری مقادیر  $V_0$  و  $l$  در  $t=0$  داریم :

$$\left[ ce^{-ct} - \frac{V_0}{l}(1 - e^{-ct})^2 \right] = 0 \Rightarrow ce^{-c} - 2(1 - e^{-c}) = 0$$

از حل معادله فوق  $c = 0.49 \text{ s}^{-1}$  حاصل می شود.

۴۶- اگر توزیع سرعت در لایه مرزی به ضخامت محلی  $r$  را به صورت  $\frac{U}{U_\infty} = ay^3 + by^2 + cy + d$  تقریب

بزنیم که در آن  $U_\infty$  سرعت در خارج لایه مرزی است، در آن صورت حاصل عبارت  $(a+b+c+d)$  در

نقطه جدایش برابر است با:

(۱)  $\frac{1}{r^3}(-2+3r)$       (۲)  $\frac{1}{2r^3}(3r^2-1)$       (۳)  $\frac{1}{r^3}(3-2r)$       (۴)  $0$

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\begin{aligned}\frac{U}{U_\infty} \Big|_{y=0} &= 1 \longrightarrow d = 0 \\ \frac{U}{U_\infty} \Big|_{y=r} &= 1 \longrightarrow ar^3 + br^2 + cr + d = 1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=r} &= 0 \longrightarrow 3ar^2 + 2br + c = 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{y=0} &= U_\infty (6ay + 2b) = 0 \longrightarrow b = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} ar^3 + cr = 1 \\ 3ar^2 + c = 0 \end{cases} &\Rightarrow a = -\frac{1}{2r^3}, c = \frac{3}{2r} \\ \Rightarrow a + b + c + d &= \frac{1}{2r^3} (3r^2 - 1)\end{aligned}$$

۴۷- اگر توزیع سرعت در لایه مرزی روی صفحه تخت در امتداد صفحه با چند جمله‌ای درجه دوم تقریب

زده شود آنگاه نسبت ضخامت جابه‌جایی  $\delta^*$  به ضخامت لایه مرزی برابر کدام گزینه خواهد بود؟

$$\begin{array}{llll} \frac{2}{15} \quad (۱) & \frac{1}{3} \quad (۲) & 2.5 \quad (۳) & \frac{3}{8} \quad (۴) \end{array}$$

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\eta = \frac{y}{\delta} \Rightarrow f(\eta) = \frac{u}{u_\infty} = 2\eta - \eta^2 \rightarrow \delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy = \frac{\delta}{3} \rightarrow \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{3}$$

۴۸- با استفاده از پروفیل سرعت درجه سوم به صورت  $\frac{u}{U_\infty} = \alpha y + \beta y^3$  برای لایه مرزی آرام روی صفحه

تخت حاصل  $\frac{\delta}{x} \sqrt{\text{Re}_x}$  برابر است با: ( $\delta$  ضخامت لایه مرزی در موقعیت  $x$  از ابتدای صفحه بوده و  $U_\infty$

سرعت جریان در خارج لایه مرزی است)

$$\begin{array}{llll} 3.46 \quad (۱) & 5.48 \quad (۲) & 5.04 \quad (۳) & 4.64 \quad (۴) \end{array}$$



جواب: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\left. \begin{array}{l} u|_{y=0} = 0 \\ u|_{y=\delta} = U_{\infty} \\ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\delta} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{u}{U_{\infty}} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \longrightarrow \delta = \sqrt{21.6 \cdot \frac{\nu x}{u}} \longrightarrow \frac{\delta}{x} \sqrt{\text{Re}_x} = 4.64$$

۴۹- در لایه مرزی آرام روی صفحه تخت، شار مومنتوم بر واحد عمق برای توزیع خطی به شکل

$U = U_{\infty} \left( \frac{y}{\delta} \right)$  چند برابر  $\rho U_{\infty} \delta$  خواهد بود؟  $U_{\infty}$  سرعت در خارج لایه مرزی  $\delta$  ضخامت لایه مرزی و  $\rho$  چگالی سیال است.)

$$\frac{3}{8} \text{ (۴)} \qquad \frac{8}{15} \text{ (۳)} \qquad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \qquad \frac{1}{3} \text{ (۱)}$$

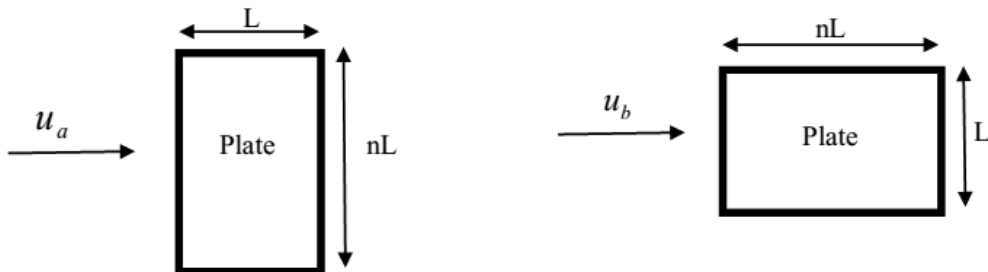
جواب: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\frac{\text{Mom} \times \text{Flux}}{w} = \int_0^{\delta} \rho u^2 dy = \frac{1}{3} \rho u_{\infty}^2$$

۵۰- مطابق شکل رو به رو صفحه‌ای به ابعاد  $L$  و  $nL$  به دور صورت مختلف در معرض جریان آزاد قرار

می گیرد. اگر نیروی درگ وارد بر صفحه در هر دو حالت یکسان باشد، نسبت سرعت جریان آزاد در حالت

(b) به سرعت جریان در حالت (a) کدام است؟



$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{ (۴)} \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (۳)} \qquad \sqrt[3]{n} \text{ (۲)} \qquad \sqrt{n} \text{ (۱)}$$

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$D_a = D_b \longrightarrow \frac{1}{2} \rho u_a^2 A_a C_{D_a} = \frac{1}{2} \rho u_b^2 A_b C_{D_b}$$

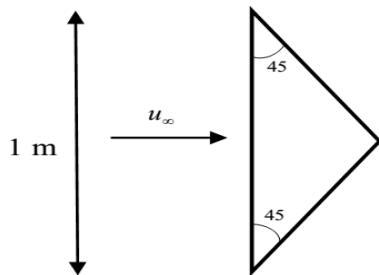
$$A_a = A_b = n l^2 \longrightarrow u_a^2 C_{D_a} = u_b^2 C_{D_b}, \dots, C_D \propto \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$$

$$\Rightarrow \frac{u_a^2}{\sqrt{\text{Re}_a}} = \frac{u_b^2}{\sqrt{\text{Re}_b}} \longrightarrow \frac{u_a^2}{\sqrt{\frac{u_a l}{\nu}}} = \frac{u_b^2}{\sqrt{\frac{u_b l}{\nu}}} \Rightarrow \frac{u_b}{u_a} = \sqrt[3]{n}$$

۵۱- آب از روی صفحه‌ای مثلثی مطابق شکل رو به رو با سرعت بالا دستی  $u_\infty = 0.2 \text{ m/s}$  عبور می‌کند.

اگر بدانیم که تنش برشی روی صفحه از رابطه  $\tau_w = 0.332 u_\infty^{3/2} \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}}$  پیروی می‌کند، نیروی اصطکاک

حاصل چه قدر خواهد بود؟ جریان از یک طرف صفحه عبور می‌کند.  $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$  و



$$\mu = 1.12 \times 10^{-3} \text{ pa.s}$$

(۱)  $0.0296 \text{ N}$

(۲)  $0.0592 \text{ N}$

(۳)  $0.0148 \text{ N}$

(۴)  $0.1148 \text{ N}$

جواب: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$D = \int \tau_w dA = 0.332 u_\infty^{3/2} \sqrt{\rho \mu} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dA = 0.332 u_\infty^{3/2} \sqrt{\rho \mu} \times 2 \times \int_{x=0}^{0.5} \frac{0.5-x}{\sqrt{x}} dx$$

$$\longrightarrow D = 0.0296 \text{ N}$$

۵۲- کدام یک از عبارتهای زیر درباره جدایش لایه مرزی صحیح است؟

(۱) وجود گرادیان فشار در جهت جریان شرط لازم و کافی برای جدایش لایه مرزی از سطح است.

(۲) وجود گرادیان فشار مثبت در جهت جریان شرط لازم برای جدایش لایه مرزی از سطح است.

(۳) وجود گرادیان فشار منفی در جهت جریان شرط لازم برای جدایش لایه مرزی از سطح است.

(۴) وجود گرادیان فشار منفی در جهت جریان شرط کافی برای جدایش لایه مرزی از سطح است.

جواب: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۵۳- در لایه مرزی جریان تراکم‌ناپذیر روی صفحه تخت، مولفه‌ی موازی صفحه با رابطه  $U_0(\frac{y}{\delta})$  تقریب

زده شده است که  $U_0$  سرعت در خارج از لایه مرزی و  $\delta$  ضخامت محلی آن است. کدام گزینه برابر مولفه

عمود بر صفحه می‌باشد؟

$$(۱) \quad \frac{U_0 y}{2\delta} \cdot \frac{d\delta}{dx} \quad (۲) \quad \frac{U_0 y}{\delta^2} \cdot \frac{d\delta}{dx} \quad (۳) \quad \frac{2U_0 y}{\delta} \cdot \frac{d\delta}{dx} \quad (۴) \quad \frac{2U_0 y}{\delta^2} \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

جواب: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = +\frac{U_0}{\delta^2} \cdot \frac{d\delta}{dx} y \longrightarrow v = +\frac{U_0 y}{\delta^2} \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

۵۴- در لایه مرزی روی صفحه تخت، ضخامت لایه مرزی ۱۰ سانتی‌متر از ابتدای صفحه برابر ۵ میلی‌متر

می‌باشد. اگر ویسکوزیته سینماتیکی جریان  $10^{-5} \frac{m^2}{s}$  باشد، سرعت در خارج لایه مرزی چند متر بر ثانیه

است؟

$$(۱) \quad 2 \quad (۲) \quad 1.5 \quad (۳) \quad 1 \quad (۴) \quad 0.5$$

جواب: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

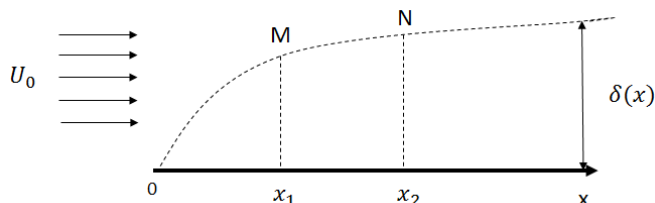
$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} \longrightarrow \frac{5 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-2}} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} \Rightarrow Re_x = 10^4 \Rightarrow \frac{U_\infty x}{\nu} = 10^4$$

$$\frac{U_\infty \times 0.1}{10^{-5}} = 10^4 \longrightarrow U_\infty = 1 \left( \frac{m}{s} \right)$$

۵۵- در جریان روی صفحه تختی مطابق شکل روبرو، توزیع سرعت را در لایه مرزی به صورت

$$\frac{U}{U_0} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3$$

سطح MN بر واحد عمق صفحه کدام گزینه است؟



$$\frac{1}{2} \rho U_0^2 \left( 1 - \frac{\delta(x_2)}{\delta(x_1)} \right) \quad (۳) \qquad \frac{1}{2} \rho U_0^2 \cdot \frac{\delta(x_2)}{\delta(x_1)} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{4} \rho U_0 (\delta(x_2) - \delta(x_1)) \quad (۴) \qquad \frac{5}{8} \rho U_0 (\delta(x_2) - \delta(x_1)) \quad (۲)$$

جواب: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\dot{m} = \int_0^{\delta} \rho u dy \longrightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{m}(x_1) = \frac{5}{8} \rho U_0 \delta(x_1) \\ \dot{m}(x_2) = \frac{5}{8} \rho U_0 \delta(x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{m}_{MN} = \frac{5}{8} \rho U_0 (\delta(x_2) - \delta(x_1))$$

۵۶- چنانچه سیال تراکم ناپذیری چنان آرام حرکت کند طوری که بتوان در جملات اینرسی صرف نظر نمود،

در این صورت در غیاب نیروهای خارجی، معادله ناویر استوکس به کدام صورت زیر تبدیل خواهد شد؟

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \quad (۳) \qquad \nabla^2 \vec{V} = 0 \quad (۲) \qquad \nabla^2 p = 0 \quad (۱) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (۴)$$

جواب: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{V} \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} p) + \nu \vec{\nabla} \cdot (\nabla^2 \vec{V}) *$$

$$*: \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} p) = \nabla^2 p = 0 \longrightarrow \longrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\nabla^2 \vec{V}) = \nabla^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0$$

۵۷- کدام یک از گزینه‌های زیر در همسایگی نقطه جدایش سیال از سطح صحیح است؟

- (۱) چنان چه گرادیان فشار در راستای جریان مثبت باشد، حتما در نقطه مزبور جدایش رخ می‌دهد.
- (۲) فشار سیال در این همسایگی بیشینه بوده و ضخامت لایه مرزی زیاد است
- (۳) فشار سیال در این همسایگی کمینه بوده و ضخامت لایه مرزی دارای آهنگ رشد بالایی است.
- (۴) تنش برشی سیال نزدیک به صفر بوده و سرعت سیال مقدار ناچیزی دارد.

جواب: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۵۸- دو جریان جداگانه آب و هوا با سرعت و دمای یکسان از روی یک صفحه تخت و به موازات آن حرکت می‌کنند. در مکان‌های یکسان نسبت ضخامت لایه مرزی آب به ضخامت لایه مرزی هوا کدام گزینه است؟

- (۱) بزرگتر از یک
- (۲) کوچکتر از یک
- (۳) برابر یک
- (۴) در سرعت‌های مختلف هر سه حالت ممکن است

جواب: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\delta_{\text{آب}} > \delta_{\text{هوا}} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \theta_{\text{آب}} > \theta_{\text{هوا}}$$

۵۹- صفحه تختی به طول یک متری و عمق ۳ متر در معرض جریان هوایی با سرعت  $2 \frac{m}{s}$  قرار می‌گیرند.

ضخامت لایه مرزی در انتهای صفحه ( لبه فرار یعنی در  $x=1m$  ) چند میلی‌متر می‌باشد؟

$$g = 1.46 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

(۴) 2.59

(۳) 1.79

(۲) 4.65

(۱) 13.5

جواب: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

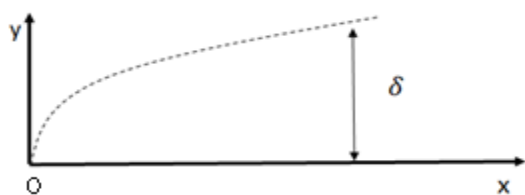
$$Re = \frac{VL}{\nu} = \frac{2 \times 1}{1.46 \times 10^{-5}} = 137000$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{\sqrt{Re_L}} = \frac{5}{\sqrt{137000}} = 0.0135 \xrightarrow{L=1000mm} \delta = 13.5mm$$

۶۰- توزیع سرعت در راستای درون لایه مرزی به فرم  $U = U_0(A + B \cos C\eta)$  که در آن  $U_0$  سرعت

بیرون لایه مرزی،  $\eta = \frac{y}{\delta}$  و  $\delta$  ضخامت لایه مرزی است، فرض شده است. مقادیر  $A$  و  $B$  و  $C$  کدام

است؟



$$A = 0, B = 1, C = \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

$$A = 0, B = 1, C = \pi \quad (۲)$$

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = \pi \quad (۴)$$

جواب: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$u|_{\eta=0} = 0 \longrightarrow A + B = 0$$

$$u|_{\eta=1} = U_0 \longrightarrow A + B \cos C = 1$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0 \longrightarrow -BC \sin C = 0 \longrightarrow C = \pi \longrightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

۶۱- در جریان کوئت بین دو صفحه موازی به فاصله  $h$ ، به ازای چه مقداری از گرادیان فشار  $\frac{dp}{dx}$  (X راستای

جریان است). دبی کلی حجمی گذرا از یک مقطع دلخواه برابر صفر خواهد بود؟ سرعت صفحه بالایی  $v$ .

و سرعت صفحه پایینی صفر است. ویسکوزیته سیال  $\mu$  می باشد.

$$\frac{3\mu v_0}{h^2} \quad (۳) \qquad \frac{\mu v_0}{h^2} \quad (۱)$$

$$\frac{6\mu v_0}{h^2} \quad (۴) \qquad \frac{2\mu v_0}{h^2} \quad (۲)$$

جواب: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \beta$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{\beta}{\mu} y + c_1 \Rightarrow u = \frac{\beta}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2$$

$$\left. \begin{aligned} u(0) = 0 &\rightarrow c_2 = 0 \\ u(h) = v_0 &\rightarrow c_1 = \frac{v_0}{h} - \frac{\beta}{2\mu} h \end{aligned} \right\} \Rightarrow u = \frac{\beta}{2\mu} (y^2 - hy) + \frac{v_0}{h} y$$

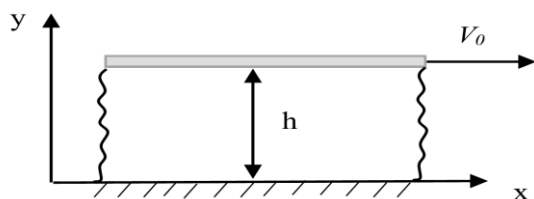
$$q = \int_0^h u dy = \frac{\beta}{2\mu} \left[ \frac{y^3}{3} - h \frac{y^2}{2} \right]_0^h + \frac{v_0}{h} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{v_0 h}{2} - \frac{\beta h^3}{12\mu}$$

$$q = 0 \Rightarrow \frac{v_0 h}{2} = \frac{\beta h^3}{12\mu} \Rightarrow \beta = \frac{6v_0 \mu}{h^2}$$

۶۲- مطابق شکل رو به رو در جریان کوئت بین دو صفحه موازی به فاصله  $h$  صفحه پایینی ساکن و صفحه

بالایی با سرعت  $V_0$  حرکت می کند. اگر گرادیان فشار در راستای جریان برابر  $\frac{dp}{dx}$  فرض شود به ازای چه

مقداری از آن تنش برشی روی صفحه زیرین برابر صفر می باشد؟  $\mu$  ویسکوزیته سیال است.



$$\frac{3\mu v_0}{h^2} \quad (\text{د})$$

$$\frac{\mu v_0}{h^2} \quad (\text{ا})$$

$$\frac{6\mu v_0}{h^2} \quad (\text{ف})$$

$$\frac{2\mu v_0}{h^2} \quad (\text{ب})$$

جواب: گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\tau_{yx} \big|_{y=0} = \mu \frac{du}{dy} \big|_{y=0} = \mu \left\{ \frac{\beta}{2\mu} (2y - h) + \frac{v_0}{h} \right\} \big|_{y=0} = -\frac{\beta h}{2} + \mu \frac{v_0}{h}$$

$$\tau_{yx} \big|_{y=0} = 0 \rightarrow -\frac{\beta h}{2} + \mu \frac{v_0}{h} = 0 \rightarrow \beta = \frac{2\mu v_0}{h^2}$$

۶۳- جریان تراکم ناپذیری با لزجت  $\mu$  به صورت آرام در لوله یکنواختی با مقطع عرضی بیضی شکل با قطر

بزرگ  $2\alpha$  و قطر کوچک  $2b$  برقرار است. چنانچه گرادیان فشار در جهت جریان برابر  $-\frac{dp}{dx}$  باشد دبی

حجمی برابر کدام گزینه خواهد بود؟

$$\frac{a^3 b^3 \pi}{\mu(a^2 + b^2)} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \quad (\text{د})$$

$$\frac{a^3 b^3}{4\mu(a^2 + b^2)} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \quad (\text{ا})$$

$$\frac{a^3 b^3 \pi}{4\mu(a^2 + b^2)} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \quad (\text{ف})$$

$$\frac{a^3 b^3}{\mu(a^2 + b^2)} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \quad (\text{ب})$$

جواب: گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right) \quad *$$

از مقایسه با جریان درون لوله در اینجا می توان نوشت  $u = k \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$  لذا:



$$k = \frac{a^2 b^2}{2\mu(a^2 + b^2)} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \quad (*) \text{ جایگذاری } u \text{ در}$$

$$\therefore u = \frac{a^2 b^2}{2\mu(a^2 + b^2)} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$$Q = \int u dA$$

با تغییر متغیر  $x = \lambda a \cos \theta$  و  $y = \lambda a \sin \theta$  که  $0 \leq \lambda \leq 1$  و  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  داریم:

$$u = \frac{a^2 b^2}{2\mu(a^2 + b^2)} \left( -\frac{dp}{dx} \right) (1 - \lambda^2) \Rightarrow Q = \int u(\lambda, \theta) \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\lambda, \theta)} \right|}_{J} d\lambda d\theta$$

که در اینجا  $J = \lambda ab$  می‌باشد. به این ترتیب:

$$Q = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\lambda=0}^1 \frac{a^3 b^3}{2\mu(a^2 + b^2)} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \lambda (1 - \lambda^2) d\lambda = \frac{a^3 b^3 \pi}{4\mu(a^2 + b^2)} \left( -\frac{dp}{dx} \right)$$

۶۴- صفحه‌ای افقی که زیر سیال ساکنی با لزجت سینماتیکی  $\mathcal{Q}$  قرار دارد. در لحظه  $t=0$  ناگهان با سرعت

$v_0$  در جهت  $+x$  حرکت می‌کند. ضخامت لایه‌ای از سیال که تحت تاثیر حرکت صفحه قرار می‌گیرد با

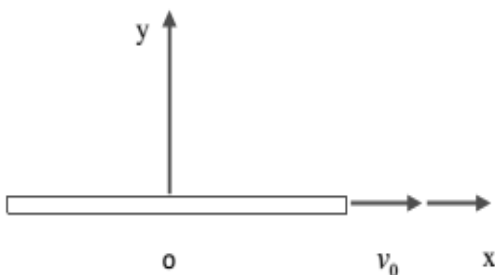
کدام عبارت زیر متناسب است؟

$$\sqrt{gt} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{\mathcal{Q}y}{v_0}} \quad (۲)$$

$$\sqrt{\frac{\mathcal{Q}x^3}{v_0}} \quad (۳)$$

$$\sqrt{\frac{\mathcal{Q}y^3}{v_0}} \quad (۴)$$



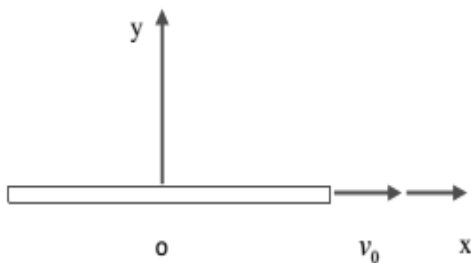
جواب: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\left. \begin{aligned} u_t &= g U_{yy} \\ u(0, t) &= \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ v_0, t > 0 \end{cases} \\ \lim_{y \rightarrow \infty} |u(y, t)| &< M \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{u(y, t)}{v_0} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{gt}}\right) \rightarrow \frac{y}{2\sqrt{gt}} \Big|_{y=\delta}^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \rightarrow \delta = 3\sqrt{gt}$$

۶۵- مطابق شکل سیال ساکنی با ویسکوزیته سینماتیکی  $g$  بالای صفحه  $y=0$  قرار دارد. در لحظه  $t=0$  این

صفحه با سرعت افقی  $u = v_0 \cos \omega t$  شروع به نوسان می‌کند و اگر بدانیم که سرعت در  $y$ های متفاوت

به صورت  $u(y, t) = A \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2g}} y\right)$  می‌باشد مقدار دامنه سرعت  $A$  برابر کدام گزینه خواهد بود؟



$$v_0 \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2g}} y\right) \quad (۱)$$

$$v_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2g}} y\right) \quad (۲)$$

$$v_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{g}} y\right) \quad (۳)$$

$$v_0 \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{g}} y\right) \quad (۴)$$

جواب: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$u(y, t) = A \operatorname{Re}\left[e^{i\omega t}\right] \xrightarrow{u_t = g U_{yy}} \frac{d^2 A}{dy^2} - i \cdot \frac{\omega}{g} \cdot A = 0$$

که در نهایت با اعمال شرایط اولیه و شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$u(y, t) = v_0 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2g}} y\right) \cdot \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2g}} y\right)$$

۶۶- در جریان لایه‌ای با تقارن محوری بین دو استوانه هم محور به شعاع‌های  $a, b$  ( $b > a$ ) توزیع سرعت در

جهت محور استوانه برابر است با:

$$u = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{4\mu} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (۲)$$

$$u = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{2\mu} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (۱)$$

$$u = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{4\mu} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (۴)$$

$$u = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{2\mu} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (۳)$$

جواب: گزینه ۴ صحیح می باشد.

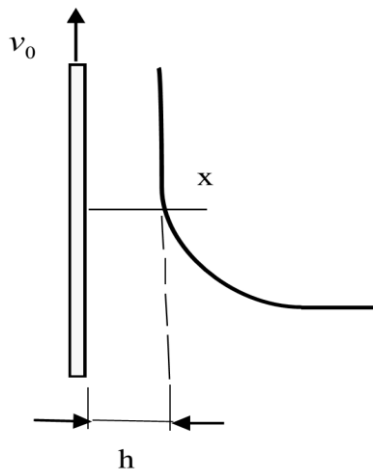
$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} + g \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dp}{dr} \cdot r$$

$$r \frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} r^2 + c_1 \rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r + \frac{c_1}{r} \rightarrow u = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

۶۷-تسمه‌ی عریض متحرکی از میان مخزن مایع لزجی به طور عمودی با سرعت ثابت  $v_0$  به سوی بالا حرکت

می کند. ضخامت لایه ی سیال تشکیل شده روی تسمه برابر  $h$  است. سرعت متوسط سیال با فرض لایه‌ای

بودن جریان و توسعه یافته بودن آن برابر کدام گزینه است؟ چگالی سیال  $\rho$  و لزجت آن  $\mu$  است.



$$v_0 - \frac{\rho g h^2}{\mu} \quad (۱)$$

$$v_0 - \frac{\rho g h^2}{3\mu} \quad (۲)$$

$$v_0 - \frac{\rho g h^2}{2\mu} \quad (۳)$$

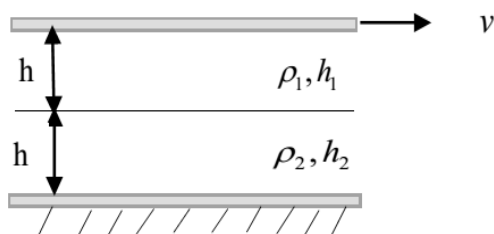
$$v_0 - \frac{\rho g h^2}{4\mu} \quad (۴)$$

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\rho g}{\mu} \quad \& \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=h} = 0 \quad \& \quad v|_{x=0} = v_0 \rightarrow v(x) = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 - \frac{\rho g h}{\mu} x + v_0$$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h v dx = \frac{1}{h} \int \left( \frac{\rho g}{2\mu} x^2 - \frac{\rho g h}{\mu} x + v_0 \right) dx = \frac{1}{h} \left( v_0 h - \frac{\rho g h^3}{3\mu} \right) = v_0 - \frac{\rho g h^2}{3\mu}$$

۶۸- بین دو صفحه موازی افقی که پایینی ثابت و بالایی با سرعت ثابت  $v$  حرکت می‌کند دو سیال مخلوط نشدنی با چگالی  $\rho_1, \rho_2$  و لزجت  $\mu_1, \mu_2$  با ضخامت یکسان  $h$  قرار دارد. سرعت در فصل مشترک دو سیال کدام است؟



$$(۱) \quad \frac{v}{1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

$$(۲) \quad \frac{v}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

$$(۳) \quad \frac{v}{1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

$$(۴) \quad \frac{v}{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

جواب: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$(۱) \text{ در سیال } u(y=2h)=v \rightarrow \beta_1 = v - A_1(2h)$$

$$(۲) \text{ در سیال } u(y=0)=0 \rightarrow \beta_2 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = A_1(y-2h)+v \quad \& \quad u_2 = A_2 y$$

در فصل مشترک ( $y=h$ ) داریم  $u_1 = u_2$  بنابراین:

$$A_1(h-2h)+v = A_2 h \rightarrow A_2 = -A_1 + \frac{v}{h} \quad *$$

از سوی دیگر در فصل مشترک تنش برشی باید یکسان باشد:

$$\tau = \mu(u_y + v_x) = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_1 = \mu_1 A_1 \\ \tau_2 = \mu_2 A_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\tau_1 = \tau_2} \mu_1 A_1 = \mu_2 A_2 \rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \xrightarrow{*} A_2 = \frac{v/h}{1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

$$\therefore u_2(y=h) = A_2 h = \frac{v}{1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

۶۹- دو استوانه هم مرکز دوار سیالی لزج را احاطه کرده‌اند. استوانه‌ی داخلی ثابت و استوانه‌ی بیرونی دارای سرعت زاویه‌ای ثابت می‌باشد. گشتاور مورد نیاز برای گرداندن استوانه‌ی خارجی برابر کدام گزینه است؟

$$\frac{8\pi\mu R_o^2 R_i^2}{R_o + R_i} \quad (\text{۴}) \qquad \frac{8\pi\mu R_o^2 R_i^2}{R_o - R_i} \quad (\text{۳}) \qquad \frac{4\pi\mu R_o^2 R_i^2}{R_o + R_i} \quad (\text{۲}) \qquad \frac{4\pi\mu R_o^2 R_i^2}{R_o - R_i} \quad (\text{۱})$$

جواب: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\begin{aligned} v_\theta(r) &= \frac{1}{R_o^2 - R_i^2} \left[ (\omega R_o^2 - 0)r - \omega \frac{R_o^2 R_i^2}{r} \right] = \frac{\omega_0 R_o^2}{R_o^2 - R_i^2} \left( r - \frac{R_i^2}{r} \right) \\ \tau_{r\theta} &= 2\mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = 2\mu \frac{\omega_0 R_o^2}{R_o^2 - R_i^2} \left( 1 + \frac{R_i^2}{r^2} - 1 + \frac{R_i^2}{r^2} \right) = 4\mu \left[ \frac{\omega_0 R_o^2 R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \right] \frac{1}{r^2} \\ dM &= r \tau dA = 4\mu \frac{\omega_0 R_o^2 R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot dA \end{aligned}$$

$$\& \quad dA = 2\pi r dr$$

$$M = \frac{8\pi\mu R_o^2 R_i^2 (R_o - R_i)}{R_o^2 - R_i^2} \Rightarrow M = \frac{8\pi\mu R_o^2 R_i^2}{R_o + R_i}$$

۷۰- در جریان پایای سیالی توزیع فشار به صورت  $p = 6x^2 + (y + z^2) + 10$  بر حسب پاسکال می‌باشد.

اگر چگالی سیال مقداری ثابت و برابر  $1000 \frac{kg}{m^3}$  باشد. با فرض  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$  شتاب حرکت ذره‌ای واقع

در موقعیت  $(۶, ۲, ۱۰)$  (مختصات بر حسب متر) کدام گزینه است؟

$$-0.072\hat{i} - 0.001\hat{j} \quad (\text{۲}) \qquad -0.072\hat{i} - 0.001\hat{j} - 9.83\hat{k} \quad (\text{۱})$$

$$-0.072\hat{i} - 0.001\hat{j} - 9.81\hat{k} \quad (\text{۴}) \qquad -0.072\hat{i} - 9.81\hat{k} \quad (\text{۳})$$

جواب: گزینه ۱ صحیح می باشد.

$$p = 6x^2 + (y + z^2) + 10 \rightarrow \nabla p = 12x\hat{i} + (1)\hat{j} + 2z\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} p = 72\hat{i} + 1\hat{j} + 20\hat{k} \left(\frac{pa}{m}\right)$$

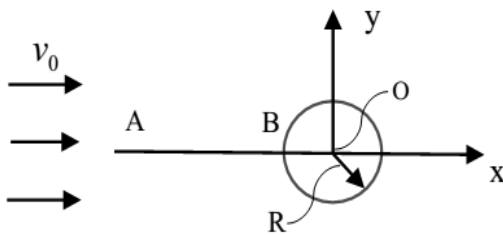
$$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}(m) \text{ در}$$

$$-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p - g\vec{\nabla} z = \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{1}{1000}(72\hat{i} + \hat{j} + 20\hat{k}) - 9.81\hat{k} \rightarrow \vec{a} = -0.072\hat{i} - 0.001\hat{j} - 9.83\hat{k}$$

۷۱- کره ای به شعاع R در جریان یکنواخت افقی با سرعت  $v_0$  غوطه ور می باشد. چنانچه بدانیم که سرعت

سیال در طول خط جریان AB با رابطه ی  $\vec{V} = u\hat{i} = v_0\left(1 + \frac{R^3}{x^3}\right)\hat{i}$  مشخص می شود شتاب ماکزیمم در

چه موقعیتی ( $x=?$ ) رخ می دهد؟



$$-2R \quad (۱)$$

$$-1.205R \quad (۲)$$

$$-1.315R \quad (۳)$$

$$-1.516R \quad (۴)$$

جواب: گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$a_x = \frac{du}{dt} = u \frac{du}{dx} = v_0 \left(1 + \frac{R^3}{x^3}\right) \left(-3v_0 \frac{R^3}{x^4}\right) = -3v_0 R^3 (x^{-4} + R^3 x^{-7})$$

$$\frac{da_x}{dx} = 0 \rightarrow x = -\left(\frac{7R^3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \cong -1.205R$$

۷۲- اگر برای یک جریان تراکم‌ناپذیر در مختصات استوانه‌ای توزیع سرعت به صورت  $\vec{V} = cr^n \cdot \hat{e}_\theta$  باشد که در آن  $c$  مقداری ثابت و  $\hat{e}_\theta$  بردار یکه در راستای  $\theta$  است آنگاه برای مقدار  $n$  کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۱)  $n = 0, n = 1$       (۲)  $n = 0, n = -1$

(۳)  $n = 1, n = -1$       (۴)  $n = 1, n = 0, n = -1$

جواب: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

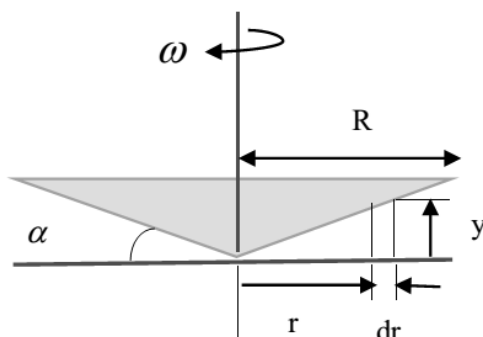
باید معادله ناور استوکس ارضا شود

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} \right) = 0 \xrightarrow{ru_\theta = cr^{n+1}} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) = (n+1)cr^n \rightarrow \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) = (n+1)cr^{n-1}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} \right) = (n+1)(n-1)cr^{n-2} = 0$$

پس  $n = -1$  یا  $n = 1$  می‌باشد.

۷۳- فاصله بین صفحه‌ی مسطح و مخروط دوار نشان داده شده با سیالی به لزجت  $\mu$  پر شده است. اگر مخروط با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\omega$  دوران کند با صرف نظر از اثرات لبه‌ای و با فرض وجود تنها جریان مماسی با پروفیل خطی در هر شعاع  $r$  گشتاور لازم برای تداوم دوران برای مقادیر کوچک زاویه‌ی  $\alpha$  کدام گزینه می‌باشد؟



(۱)  $\frac{2\pi\mu\omega R^3}{3\alpha}$

(۲)  $\frac{2\pi\mu\omega R^3}{\alpha}$

(۳)  $\frac{\pi\mu\omega R^3}{3\alpha}$

(۴)  $\frac{\pi\mu\omega R^3}{\alpha}$

جواب: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

گرادیان سرعت مماسی  $\frac{V_\theta}{y} = \frac{\omega}{\tan \alpha}$  و  $\frac{y}{r} = \tan \alpha$  پس  $\frac{\omega}{\tan \alpha} = \frac{r\omega}{r \tan \alpha} = \frac{V_\theta}{y}$

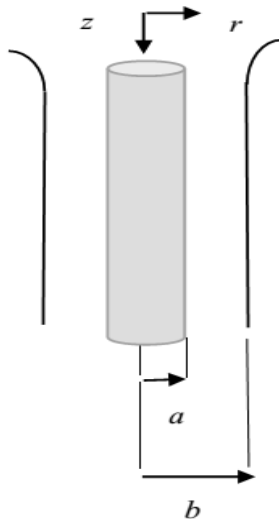
نیروی تنش برشی وارد بر المان سطح  $dA$ :  $d\tau = \mu dA \frac{\omega}{\tan \alpha} = \mu(2\pi r) ds \frac{\omega}{\tan \alpha}$

از سوی دیگر  $\frac{dr}{ds} = \cos \alpha$  لذا گشتاور لازم برای المان  $dr$ :  $dM = r d\tau$  پس:

$$dM = \frac{\mu 2\pi \omega r^2 dr}{\sin \alpha} \rightarrow M = \int_{r=0}^R \frac{\mu 2\pi \omega r^2}{\sin \alpha} dr$$

$$\Rightarrow M = \frac{2\pi \mu \omega R^3}{3\alpha}$$

۷۴- فیلم مایعی با لزجت  $\mu$  مطابق شکل در خارج میله‌ای عمودی به شعاع  $a$  به سوی پایین جریان دارد. در فاصله‌ی کافی از ابتدای میله نیروی برشی سیال با گرانش به تعادل رسیده و ضخامت فیلم ثابت می‌ماند. دبی حجمی سیال کدام گزینه است؟  $k = \frac{\pi \rho g \alpha^4}{8\mu}$  و  $\beta = \frac{b}{a}$



(۱)  $k(4 \ln \beta + 4\beta^2 - 1 - \beta^4)$

(۲)  $k(4\beta^2 \ln \beta + 4\beta^2 - 1 - \beta^4)$

(۳)  $k(4\beta^2 \ln \beta - 4\beta^2 - 1 - \beta^4)$

(۴)  $k(4\beta^4 \ln \beta + 4\beta^2 - 1 - 3\beta^4)$

جواب: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

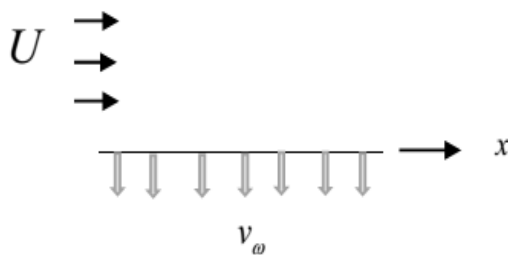
$$0 = \rho g + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) \rightarrow u = -\frac{\rho g r^2}{4\mu} + A \ln r + B$$

B.C.  $\begin{cases} u(a) = 0 \\ \frac{du}{dr}(b) = 0 \end{cases} \rightarrow u = \frac{\rho g b^2}{4\mu} \left[ 2 \ln \left( \frac{r}{a} \right) - \left( \frac{r}{b} \right)^2 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right]$



$$Q = \int_a^b u(2\pi r) dr = \frac{\pi \rho g \alpha^4}{8\mu} [4\beta^4 \ln \beta + 4\beta^2 - 3\beta^4 - 1]$$

۷۵- جریان پایایی با سرعت افقی  $U$  (در  $y \rightarrow \infty$ ) از روی صفحه‌ی تختی واقع در  $y=0$  عبور می‌کند (شکل رو به رو). با توجه به متخلخل بودن صفحه یک سرعت عمود بر دیواره‌ی صفحه به اندازه‌ی  $V_\omega$  وجود دارد. توزیع سرعت  $u$  در لایه‌ی مرزی روی صفحه کدام گزینه است؟



$$u = U \left( 1 - e^{-\left(\frac{V_\omega}{g}\right)y} \right) \quad (1)$$

$$u = U \left( 1 - e^{\left(\frac{V_\omega}{g}\right)y} \right) \quad (3)$$

$$u = U \left( e^{-\left(\frac{V_\omega}{g}\right)y} \right) \quad (2)$$

$$u = U \left( e^{\left(\frac{V_\omega}{g}\right)y} \right) \quad (4)$$

جواب: گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$-V_\omega \frac{du}{dy} \Rightarrow \frac{d^2u}{dy^2} \rightarrow u(y) = A + B \exp \left[ \left( -\frac{V_\omega}{g} \right) y \right], u(0) = 0, u(\infty) = v$$

$$\Rightarrow u(y) = v \left( 1 - e^{-\left(\frac{V_\omega}{g}\right)y} \right)$$

